

様式 6

論文目録

報告番号	甲 工 乙 工 工 修	第 58 号	氏 名	森 本 敏 文
学位論文題目	電子ビーム・プラズマ系に発生する波動現象と不安定性			
論文の目次				
第 1 章 序論		第 4 章 線形理論からの検討		
第 2 章 分散関係		第 5 章 電子ビーム・プラズマ系の非線形相互作用		
第 3 章 波動実験		第 6 章 結論		
参考論文				
主論文				
(1) "ビーム・プラズマ系に励起される Trivelpiece-Gould モードの成長率"; 森本敏文, 森 一郎; 信学論 C, Vol.J83-C, No.1, pp.23-29, 2000.				
(2) "Anomalous electronic stopping and relaxation in the plasma and application of its theory to beam-surface interaction"; I.Mori, T.Morimoto, R.Kawakami and K.Tominaga; Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 153, pp.31-35,1999				
(3) "Cascade collision of Fe-Atom caused by low energy He-incidence and effect of temperature to the type of defect"; I.Mori, T.Morimoto, R.Kawakami and K.Tominaga; Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 153, pp.126-129,1999.				
(4) "Structure of Multi-dimensional Soliton and Generation of Caviton in the Nonlinear Beam-Plasma System"; I.Mori, T.Morimoto, RKawakami, K.Tominaga; J. Plasma Fusion Res. SERIES, Vol.2. pp.363-367, 1999.				
副論文				
(1) "ビーム・プラズマ放電の機構について"; 森本敏文, 森 一郎; 詫間電波高専紀要, No.2, pp.53-62, 1974.				
(2) "Two waves in a beam-plasma system at low pressures"; T.Morimoto, I.Mori; Proc. of Int. Conf. on Plasma Physics, Vol.1, pp.202-205, 1996.				
(3) "Growth Rates of Trivelpiece-Gould Modes in a Magnetized Beam-Plasma System"; T.Morimoto, I.Mori; Proc. of Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Vol.IV, pp.81-82, 1999.				
(4) "Nonlinear Waves Observed in an Electron Beam-Plasma System"; R.Kawakami, I.Mori, T.Morimoto; J.Plasma Fusion Res. SERIES, Vol.2, pp.368-370, 1999.				
(5) "Multi-Dimentional Solitons and its Contribution to Beam-Plasma Discharge"; I.Mori, T.Morimoto, R.Kawakami, S.Hasebe and K.Tominaga; Proc. of Int. Conf. on Plasma Physics, Vol.1, pp.766-769, 1996.				
(6) "Multi-Dimensional Soliton and Its Experimental Stability"; I.Mori, T.Morimoto, R.Kawakami and K.Tominaga; Int. Conf. on the Physics of Dusty Plasmas, pp.543-546, 1996.				



論文内容要旨

報告番号	甲 工 乙 工 第 58 号 氏 名 工 修	森 本 敏 文
学位論文題目	電子ビーム・プラズマ系に発生する波動現象と不安定性	
内容要旨		
<p>本研究は、電子ビーム・プラズマ系に於いて、その放電開始前に発生する波動の性質とその由来を、Trivelpice-Gould(T-G) モードの解析及びそれを裏付けるための実験から調査し、電子ビーム・プラズマ放電機構を明らかにするものである。また、その波動を非線形理論で扱う場合の方針を定めようとするものである。</p> <p>希薄気体中 (<math>\sim 10^{-4}</math>Torr) に電子ビームを注入すると、完全電離に近い、強い高周波放電が起きる。その原因は、電子ビームが軌道中の気体を衝突電離して作る薄いプラズマと電子ビーム自体とで構成される電子ビーム・プラズマ系の不安定相互作用にある。現在、この強い放電を起こすのは、大局的には、電子サイクロトロン波であるとの考えが一般に認められている。しかし、強い放電だけでなく、その前に励起される波動が完全に解明されたかといえそうでもない。本研究では、まず、電子ビーム・プラズマ系の波動成長率を求めるために、T-G モードの分散関係式を複素数で計算した。これまで、この分散関係式は実数計算しかなされていない。今回の計算からは、(1) プラズマ密度が低いときは、Slow Space Charge Wave (S.S.C.W.) に励起される右回り偏波モード (高域混成波) の成長率が大きく、(2) プラズマ密度が中程度のときは、Slow Cyclotron Wave に励起される右回り、左回り、軸対称偏波モード (高域混成波) の各成長率が同程度で大きく、(3) プラズマ密度が高いときは、S.S.C.W. に励起される軸対称モードの成長率が大きいということが分かった。</p> <p>次に、電子ビーム・プラズマ系の励起波動を実験から詳しく調査した。最近のデジタル計測機器の発達により、改めて、励起波動を調べ直すことは意味がある。すなわち、強い放電前の励起波動はパースト波であり、個々の成分波を調べなければ本質の分かりづらい面がある。また、偏波はほとんど議論されていない。電子ビーム・プラズマ系の状態は相互作用の程度に応じて三つの段階があるが、実験の結果、第一段階 (相互作用弱) では、右回り偏波の定在パースト波が励起される。第二段階 (相互作用中程度) では二種類の波動が励起される。一つは右回り波の進行パースト波で、もう一つは右回り、左回り、軸対称波が入り交じった (進行) パースト波である。第三段階 (相互作用強) は、高周波のため、周波数スペクトル調査のみであるが、非線形性の強い二種類の波動の存在を確認した。ここで、先の T-G モードの分散関係式と比較検討すると、強い放電開始前に現れる二つの波動を (1), (2) のモードと仮定するなら、実験事実をすべて矛盾なく説明でき、また、強い放電の引き金になる波動は、(3) のモードであることがほぼ確実となった。</p> <p>さて、電子ビーム・プラズマ放電の引き金となる波動は線形性理論である程度予測できたが、しかし、放電直前には、非線形現象が現れており、これを説明する必要がある。そこで、境界条件は考慮しないが、非線形理論の一つである繰り込み手法を電子ビーム・プラズマ系に適用したところ、高域混成波の波形を導出することができた。また、この筋道で、イオン波との相互作用が重要ということから、電子ビームを打ち込んだイオン波の力学モデルが、結晶 (鉄) に原子 (ヘリウム) を打ち込んだときと同じになるということで、その数値計算を行った。その結果、イオン波についての性質を調べるにはまだ至っていないが、これまでに計算で得られているエネルギー以下で格子欠陥が可能ということを得た。</p>		



電子ビーム・プラズマ系に発生する  
波動現象と不安定性

2000 年 3 月

森 本 敏 文



目次

電子ビーム・プラズマ系に発生する  
波動現象と不安定性

第1章 序論

- 1.1 電子ビーム・プラズマ系
- 1.2 波動現象と不安定性

第2章 電子ビームの運動

- 2.1 電子ビームの運動方程式
- 2.2 電子ビームの安定性
- 2.3 電子ビームの不安定性
- 2.4 電子ビームの波動現象

第3章 電子ビーム・プラズマ系の波動現象

- 3.1 電子ビーム・プラズマ系の波動現象
- 3.2 電子ビーム・プラズマ系の不安定性
- 3.3 電子ビーム・プラズマ系の波動現象
- 3.4 電子ビーム・プラズマ系の不安定性

第4章 電子ビーム・プラズマ系の波動現象

- 4.1 電子ビーム・プラズマ系の波動現象
- 4.2 電子ビーム・プラズマ系の不安定性

2000年3月

森本敏文



# 目次

<b>第1章 序論</b>	<b>5</b>
1.1 本研究の背景及び目的	5
1.2 本論文の構成	9
<b>第2章 分散関係</b>	<b>11</b>
2.1 基礎方程式	11
2.2 計算方法	17
2.2.1 総当たり法	17
2.2.2 分散関係図の表示	18
2.3 プログラム試験	19
2.3.1 簡単な例	19
2.3.2 粒子モデル	21
2.4 T-Gモードの計算結果	21
2.4.1 分散関係式と絶対値	21
2.4.2 相互作用がないとき	27
2.4.3 相互作用があるとき	28
2.5 波動不安定性と成長率	28
2.5.1 T-Gモード	28
2.5.2 プラズマ・パラメータの変化	31
2.5.3 電子ビーム・パラメータの変化	34
2.5.4 衝突周波数の効果	37
<b>第3章 波動実験</b>	<b>47</b>
3.1 ビーム・プラズマ装置	47
3.2 実験結果	50
3.2.1 周波数スペクトル	51
3.2.2 磁界強度と周波数スペクトル	55
3.2.3 ガス圧力と周波数スペクトル	56
3.2.4 周波数対波動振幅特性	57
3.2.5 波動の時間的变化と位相特性	58
3.2.6 位置による波動の位相変化	61
3.2.7 波動信号のフーリエ変換	64



3.2.8	コレクタ電流特性 . . . . .	66
3.2.9	磁界強度を変化したときの波動位置 . . . . .	73
3.2.10	放電開始条件 . . . . .	76
<b>第4章</b>	<b>線形理論からの検討</b>	<b>79</b>
4.1	第一段階 . . . . .	79
4.2	第二段階 . . . . .	79
4.3	第一段階の波動励起機構 . . . . .	81
4.4	第三段階 . . . . .	81
<b>第5章</b>	<b>電子ビーム・プラズマ系の非線形相互作用</b>	<b>85</b>
5.1	Vlasov-Poisson 系 . . . . .	85
5.2	繰り込み理論 . . . . .	95
5.2.1	粒子軌道の繰り込み . . . . .	96
5.2.2	Coherence の効果の導入 . . . . .	100
5.3	ソリトンの導出 . . . . .	103
5.3.1	速度空間に於ける拡散係数の解析 . . . . .	103
5.3.2	電子ビームの速度分布関数 . . . . .	114
5.3.3	電子ビームの Stopping Power . . . . .	118
5.4	結晶中のイオン波ソリトン . . . . .	121
<b>第6章</b>	<b>結論</b>	<b>125</b>

## 第1章 序論

### 1.1 本研究の背景及び目的

圧力の低い ( $\sim 10^{-4}$  Torr) 気体中に電子ビームを打ち込むと、電子ビームの通り道に、まず衝突電離による希薄なプラズマが生じる。このプラズマとそれを生じさせる電子ビームは、電気的な波動を介して、単なる電子と中性気体原子 (分子) の二体衝突では説明できない強い相互作用を引き起こし、その結果、電子ビーム中の気体のみならず、電子ビームから遠く離れた気体をも、条件によっては完全電離と見なせるほどの放電に至らしめる。しかも、電子ビームの気体に対する平均自由行程が相当大きく、通常の2体衝突では困難と考えられる低い気圧に於いても容易に起きる。

この現象は古くから電子ビーム・プラズマ放電、電子ビーム・プラズマ相互作用、あるいは電子ビーム・プラズマ不安定などと呼ばれ、これまでに多くの実験 [3, 6, 11, 14, 21, 22, 34, 40, 45, 56, 63, 79] 及び理論的研究 [4, 8, 10, 16, 24, 27, 39] がなされてきた。その放電機構は電子ビームにより希薄プラズマ中に存在するさまざまなモードの波動を励起し、モード間の相互作用もあるかもしれないが、最終的には、その中の強力な1つあるいはいくつかの波動を介して、電子ビーム周辺に存在する中性粒子にエネルギーを与えて、これを電離すると共に、その結果生じたプラズマをさらに加熱し、高電離気体が生じるとするのが大方の見方である。

したがって、理論としては、電子ビーム中及びプラズマ中の波動にはいかなるモードが存在可能なのか、それぞれのモードの成長率はどの程度なのか、また、その相互作用の安定・不安定はいかなる条件で決まるのか、といったことが電子ビーム・プラズマ放電を理解する上できわめて重要となる。電子ビーム・プラズマ放電の発見後しばらくは、線形静電近似を用いて、プラズマを誘電体と見なす簡単な分散関係式の解析 [3] と他分野で得られていたプラズマの知見や物理原理により、この現象の概略的な理解が行われた。そして、分散関係式は、実験のよりよい説明のため、また、計算の困難さ回避のためやむなく取り入れていた近似をより改良するため、多くの研究者によって様々な工夫がなされた。

たとえば、物理原理から導き出すのが複雑なことから、衝突周波数を単に定数として与えて、波動減衰を考慮したり、プラズマに正確な境界条件を与えることなく、プラズマの大きさ以下の波長は存在しないと見積もることで、ある程度、分散関係式を現実のプラズマに反映させることができる。また、電子・プラズマ粒子を統計力学的に扱い、温度の影響を考慮した、いわゆるプラズマ分散関数 [44] を含んだ分散関係式を導くこともできる。温度効果は、プラズマ中の波動で顕著となるイオン波を分散関係式の中に取り入れることになる。磁界をプラズマに印加すると、プラズマの一様性がなくなり、異方性が生じる。



その結果、磁界方向に沿って伝搬する波動だけでなく、垂直方向に伝搬するかなり複雑な波動モード [2] が現れる。特に垂直方向成分をもつ伝搬波動の分散関係式は、プラズマ分散関数が含まれると、サイクロトロン周波数だけでなく、その高次周波数についても共鳴が可能となる。

実験室でのプラズマ中に存在する波動の振る舞いについては、Langmir がプラズマを科学的に調べられた当初から観測されており、それが相当複雑で多彩な性質を持つことは、その後の研究により次第に明らかとなった。一方、それより以前に、通信分野に於いて電磁波が電離層をどう伝搬するかの理解が、安定な通信を確保するために重要となることや、地球物理の分野に於いて地球の高層領域を知る上で、磁場の存在するプラズマ中の波動の性質を知ることが不可欠という状況もあって、プラズマ波動についてはかなり研究されていた。いくつかの有名なプラズマ中の波動モードは、こうした研究を通じて明らかにされたものである。

プラズマの工学的応用が照明、ガス入り電子管、溶接などの分野で花開くと共に、プラズマを自由に扱うためには、より正確なプラズマの性質を知る必要が出てきた。この中で特に大きな推進力となったのが、第二次世界大戦後の人工熱核融合である。それまでとは桁違いの放電パラメータを持つプラズマを発生させ、閉じこめる努力がなされた。プラズマ発生、その閉じこめ、及び加熱の方法について非常に精力的な実験、研究がなされたが、初期の楽観的な見通しは、やがて徐々に厳しいもの（もっとも、現在は核融合炉の達成前夜という状況でかつてのようなことはない）に変わった。大きな困難の原因として、プラズマ特有の様々な不安定性によるということが、理論的にだんだんとわかり、それが解明されると共にその対策が考案され、それまで手こずらせていたプラズマが少しずつ着実に制御できるようになった。

この不安定性の中には、その原因が主として波動に基づくものがあり、この面からもプラズマ中の波動の性質を正しく知ることは避けて通れないことであった。また、プラズマを加熱する手段として、低温に於いて十分効果のあった Joule 加熱は、高温になると無力となり、電子、イオン、あるいは中性粒子ビームを打ち込む方法や電子サイクロトロン、イオンサイクロトロン、高域混成波、低域混成波などプラズマ自体の持つ共鳴周波数に同調した強力な電磁波によるものに頼らざるを得なくなった。このために大電流イオン源、イオン加速装置、高出力高周波電子管などが次々と開発された。こうした加熱法を効果的なものとするには、当然のことながら、プラズマ中の波動の正しい理解なしでは済まされず、これもまたプラズマ中の波動の研究の重要性を示すものとなった。

電子ビーム・プラズマ放電が観測されたのは、地球物理や無線通信を通じてプラズマの知識がかなり得られ、さらにこれから人工衛星を利用して、大陸間通信や電離層の調査がなされるという頃であった。また、核融合実現は初期の時期にあり、通信工学では、広帯域特性を持つ進行波管の実用化が進み、高周波・高能率・低雑音化を目指してその構造の工夫と微細化が試みられていた。

そのようなこともあって、電子ビーム・プラズマ放電の高周波発振及びプラズマ加熱が確認されたことは、理論的な現象の面白さだけでなく、精密な加工を必要としない進行波管やプラズマ加熱の有力な方法として利用できるのではないかという大きな期待を抱かせた。このことが 60～70 年代にビーム・プラズマ系の実験及び理論へ多くの研究者を向

かわせた。また、電子ビームだけでなくイオンビームについてもその研究が大いになされた [41, 83]。進行波管への応用は高雑音のため無理であったが、プラズマ加熱、大電流イオン源の開発は十分可能で、それに向けて追求する価値はあった。そして、数多くのビーム・プラズマ装置が製作されて、不安定性をはじめとする様々な性質が調べられると共に、電子ビーム・プラズマ放電は如何なる機構で形成されるのかが理論的に追求された。その結果、プラズマ中に発生する様々なモードの細かいことはともかくとして、最終的に強い放電を引き起こすのは電子サイクロトロン波による、との考えが一応の結論として、一般に受け入れられた [40]。

ところで、こうした理論は、多くの場合、実験と波動振幅の小さいときに限って有効である線形分散関係式と実験を比較検討して得られたものである。しかし、電子ビーム・プラズマ放電中の周波数スペクトルは実験によるとその幅が極めて広く、線形分散関係式で説明のできるようなものではない。これは何も電子ビーム・プラズマ放電特有のことではなく、プラズマ中に於いては波動振幅が大きくなれば、こうした非線形現象は至る所に見られる。波動が成長を始めた直後の小振幅ならば、線形理論で議論することは一向に構わないが、そうでなければ、非線形の効果を無視すると、プラズマ現象が全く理解できないことになる。そこで、線形理論に於いて、より実験に近い物理パラメータで分散関係式を解析する努力や周波数・波数領域での安定判別などの一般論が展開される [4] と共に、非線形性を取り入れた理論がさかんに研究された [28, 36, 43]。数学的な困難さのために、最初は、弱い非線形を取り入れた摂動展開による理論 [39] から手が着けられ、例えばプラズマ・エコーなどはきれいに説明された例であった [15, 51]。その後、より強い非線形性を扱うために、繰り込み法 [91] や、イオン波に対する KdV 方程式や電子プラズマ波に対する非線形 Schrödinger 方程式などの直接的解法が考案され、プラズマ分野に於けるソリトン理論として発展をしてきた [91]。また、乱流現象やカオス [92] もソリトンに対する別の観点からの非線形理論として、現在、発展中である [84]。

さて、こうした非線形理論を電子ビーム・プラズマ放電に適用し [40, 85]、その機構をさらに深く理解しようとする試みも、過去に数多く行われており、より正確な実験の説明を目指してきた [85]。しかし、いずれも、境界条件を考慮しないもので、非線形方程式としてどのような方程式を用いるか、また、その解の求め方をどうするか、などの点に議論が集中しており、非線形方程式の解法の困難さがあるにしても、肝心要の部分を無視しているようである。ともかく、主に周波数により議論していた線形理論の時代には、別々の研究者により行われた実験の中にも共通の現象が見出せたが、非線形に研究の中心が移ると共に、波動の振幅（時間ではなく特に位置による波形）、細かい周波数スペクトルなどデータに共通性を見いだすことは難しくなった [45]。

電子ビーム・プラズマ放電に対しても、非線形による様々な考え [88, 48, 50, 49, 76] が提案されたが、線形理論からはずれたところについては、現在も、確立された理論は固まっていないと思える。一方、現象的にはかなり調べられており、大枠に於いて電子ビーム・プラズマ放電は調べ尽くされた感があり、新しく特異な現象の見つかる可能性は少ない。ただし、提案された理論を検証するために、より注意深い実験が、今後ますます必要になる。応用については、高電離を利用した簡単なイオン源装置の提案もあったが、電子銃のみの単純な構成でよいにも関わらず、実用化されたものは以外と少ない。こうした状況に



より、80年代には、電子ビーム・プラズマ放電に関する研究はだんだんと少なくなっていくたようである。現在この方面の研究を行っているところは国内外を見てもそう多くはない。ただ、核融合のためのプラズマ加熱手段として、イオン・ビームと共に活発に研究されている分野はある。

ところで、電子ビーム・プラズマ放電の開始機構については、はたして線形理論に於いて十分な議論がなされているであろうか。強い放電中は別にして、放電前のビーム・プラズマ系に生じる波動を理解するときに、プラズマが有限の大きさを持つことを無視して、非線形理論を適用することは妥当ではないと思える。導波管の理論を思い出すなら、管壁の境界条件が特定の波動モードを与え、その各モードや偏波面が波動伝搬の性質や電界強度パターンと密接に関係していることを考えないわけにはいかない。電子ビーム・プラズマ系は導波管に似たところがあり、存在する波動モードの偏波面などの性質が放電の開始に影響を与えないはずがない。しかし、これまで電子ビーム・プラズマ放電の機構を説明する上で、このことを念頭においた議論は全くといってなされていない。非線形性を取り入れる前に、この偏波面など境界条件に支配される波動の性質を論じておかなければ、理論の大筋を誤ってしまうのではないかと思う。

境界条件を考慮した円筒プラズマについての研究は、既に、Trivelpiece と Gould により、線形分散関係式の解析とそれに関しての実験が相当詳細に行われている [3]。境界条件から新しく現れた、いわゆる Trivelpiece-Gould (T-G) モードには、後進波が存在し、それは実験でも確かめられている。ただ、偏波面について理論的な考察はされているが、実験での調査は余りされていない。さらに、電子ビームの存在するプラズマについて議論されており、T-G モードとの相互作用が絶対不安定を生じさせることで、発振が起きるという電子ビーム・プラズマ系の不安定についても言及されている。ただし、分散関係式は、当時の計算機能力からだと思いが、実数計算のみであり、波動の成長率を求めるための複素計算は行われていない。意外なことであるが、その後、電子ビーム・プラズマ放電の研究が、さかんに行われたにも関わらず、この複素計算は行われておらず、話題は非線形に移ってしまった感がある [92]。しかし、著者は境界を無視したままで、電子ビーム・プラズマ放電の開始機構が正しく理解できるとは思えず、何かの重要な抜け落ちがあると考えた [60, 65, 93]。

本研究の最大の目的は、電子ビームの存在する T-G モードを複素計算することにより、どのモードの成長率が大きいのか調べ、これを実験で確認することにある。そして、電子ビーム・プラズマ放電がどのモードにより開始されるか、これまで議論されたことの無い面から、その開始機構を提案する。したがって、実験は波動の周波数、波長だけでなく、その偏波面を、特に詳細に調査した。また、従来の非線形理論を用いて、境界条件を入れた非線形理論への準備も兼ねて、実験で得られた電子ビーム・プラズマ系に励起される波動が説明できるかどうか計算してみる。

## 1.2 本論文の構成

本論文は、電子ビーム・プラズマ系に於いて、その放電開始前に発生する波動の性質とその不安定性の原因を、線形理論である T-G モードの複素解析及びそれを裏付けるための実験を通じて、電子ビーム・プラズマ放電に至る機構を述べたものである。また、その波動のバースト的な振る舞い（ソリトン）について、その理由を非線形理論から扱おうとするものである。

第1章の本研究の背景と目的に始まり、第2章では、電子ビーム・プラズマ放電の基礎と考える T-G モードの分散関係式の複素計算を述べる。計算には総当り法を使用するが、この方法を計算機に適用する場合の時間的な実現性と分散関係図としての解像度を十分持ち得るか否かの能力試験をした後で T-G モードの計算結果を示す。分散関係式の計算はさまざまなパラメータのもとで数多く行い、その結果から、実験と比較する上で不可欠となる波動成長率を求め、その性質を明らかにする。また、その成長率の衝突項による影響についても言及する。第3章では、これまで行ってきた電子ビーム・プラズマ系の実験装置及び得られた実験結果について述べる。特に、分散関係式の計算結果との対応のため、電子ビーム・プラズマ系に励起される波動の周波数、位相、偏波を中心にそれらの特性を詳しく説明する。第4章では、分散関係式計算結果と実験の比較検討を行う。電子ビーム・プラズマ系はその相互作用の大きさにより第一、第二、第三段階の3状態があるが、それぞれの段階に於いて、どの T-G モードが励起され、バースト波となるのかを明らかにする。そして電子ビーム・プラズマ放電がいかんして開始されるのか議論する。第5章では電子ビーム・プラズマ系の非線形理論について述べる。実験で観察されるバースト波はソリトンではないのかという考えを数式を用いて議論する。そのために、まず、逐次近似法により、二次元の解を求める。ただし、基礎式としての結果は出したが、実際の計算は複雑過ぎることがわかり、電子ビーム・プラズマ系の応用には至っていない。そこで、繰り込み手法を用いる別の方法により、計算をするための基礎式を導き、数値計算を行う。また、電子ビーム・プラズマ系のイオン波の性質を知るために、直接の目的ではないが、力学系がよく似た、結晶格子モデルを用いて、非線形性を簡単に調べる。

最後に、第6章では本研究の結果をまとめ、電子ビーム・プラズマ放電開始機構を推論する。また、放電開始後の強い非線形領域の今後の解析に向けて、注意すべきことを簡単に述べる。



## 第2章 分散関係

波動の周波数と波数（波長）の間には、その波動を支配している物理法則に基づく、一定の関係がある。これを波動の分散関係という。この分散関係を知ることは、逆に、その波動の由来を明らかにするひとつの手段となる。

ここでは、電子ビーム・プラズマ系に対し、Trivelpiece と Gould により詳細に（しかし実数計算であった）調べられた分散関係式を複素数で計算する。それにより得られる波動成長率は、実験との比較に於いて欠くことのできないものである。

### 2.1 基礎方程式

プラズマ中の波動の分散関係式を求めるために、静電近似を用いるので、次の Laplace 方程式を考察しよう。磁界（ $z$  軸方向とする）がある場合のプラズマ誘電率はテンソルで表される。ここで、 $\epsilon$  は誘電率、 $\phi$  は電位である。

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_1 & j\epsilon_2 & 0 \\ -j\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad (2.2)$$

これをまとめて、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3)$$

となり、極座標に変換すれば、Laplace 方程式は次のようになる。誘電率も極座標的に表現しているが、直ぐ後で言及するように直角座標のものを使用してよい。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{rr}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4)$$

この解は、変数分離法により  $z$ 、 $\theta$  については初等関数として簡単に求まり、

$$\phi = R(r) e^{-jn\theta - j\beta z + j\omega t} \quad (2.5)$$

として上式に代入すれば、 $r$  についての解  $R(r)$  の方程式が求まる。 $\omega$  は角周波数（ $2\pi \times$  周波数）、 $\beta$  は  $z$  方向の位相定数（波数 =  $2\pi /$  波長）、 $n$  は整数である。 $n$  は波動の偏波状態を表し、電子ビーム進行方向（外部磁界方向でもある）に対し、右回り波（ $n > 0$ ）、軸対称波（ $n = 0$ ）、左回り波  $n < 0$  となる。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} R - \beta^2 \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{rr}} R = 0 \quad (2.6)$$



これは変形された Bessel の微分方程式 [71] であり、その一般解は変形 Bessel 関数を用いて次のように表される。

$$R(r) = AI(Tr) + BK(Tr) \quad (2.7)$$

$$T^2 = \beta^2 \frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{rr}} \quad (2.8)$$

$$A, B = \text{定数}$$

さて円筒座標に於ける電界及び電束密度の境界面での条件について式を整理しておこう。円筒座標といっても、直交座標系であることから、電界と電束密度の関係は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} D_r \\ D_\theta \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} & j\epsilon_{r\theta} & 0 \\ -j\epsilon_{r\theta} & \epsilon_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

ここで、 $\epsilon_{rr} = \epsilon_1$ ,  $\epsilon_{r\theta} = \epsilon_2$ ,  $\epsilon_{zz} = \epsilon_3$  としている。すなわち、誘電率テンソル成分を直角座標から極座標へ読み替えられる。

$$D_r = \epsilon_{rr} E_r + j\epsilon_{r\theta} E_\theta \quad (2.10)$$

$$D_\theta = -j\epsilon_{r\theta} E_r + \epsilon_{rr} E_\theta \quad (2.11)$$

$$D_z = \epsilon_{zz} E_z \quad (2.12)$$

電束密度の境界面垂直成分が連続であることが条件となるが、今の場合、 $r$  方向の条件だけを考えればよい。もう一つの条件は、電界の接線方向成分が境界面で連続となることであるが、これは、静電近似をしているので、電位  $\phi$  が連続であれば満足される。

$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$ ,  $E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$  であることから条件としては、次の2つの値が境界に於いて連続であることが要求される。なお、 $\theta$  については  $2\pi$  の周期性を満足させればよい。

$$\phi, \quad \epsilon_{rr} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{j\epsilon_{r\theta}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (2.13)$$

さて、電子ビーム・プラズマ系の分散関係式を導くに際し、その境界条件として図 2.1 に示すものを仮定しよう。[I] は電子ビーム及びこの電子ビームと背景気体との衝突により生じたプラズマの領域（半径  $0 < r < a$ ）であり、[II] は [I] からの拡散及び（半径  $c < r < b$ ）波動不安定により生じたプラズマのみの領域（半径  $a < r < c$ ）であり、[III] は真空領域（半径  $c < r < b$ ）である。各領域は、実際とは違うが、簡単のためにその状態を一様とする。すなわち、誘電率テンソル成分は、[I] に於いては  $\epsilon_{rr1}$ ,  $\epsilon_{r\theta1}$ ,  $\epsilon_{zz1}$ , [II] は  $\epsilon_{rr2}$ ,  $\epsilon_{r\theta2}$ ,  $\epsilon_{zz2}$ , [III] は  $\epsilon_0$  である。また、 $z$  軸方向は無限長とする。

すると、各領域での電位  $\phi$ （波動解）は次式で与えられる。

$$\phi = \{A_1 I_n(T_1 r) + B_1 K_n(T_1 r)\} e^{-jn\theta - j\beta z + j\omega t} \quad (2.14)$$

$$\phi = \{A_2 I_n(T_2 r) + B_2 K_n(T_2 r)\} e^{-jn\theta - j\beta z + j\omega t} \quad (2.15)$$

$$\phi = \{A_3 I_n(T_3 r) + B_3 K_n(T_3 r)\} e^{-jn\theta - j\beta z + j\omega t} \quad (2.16)$$

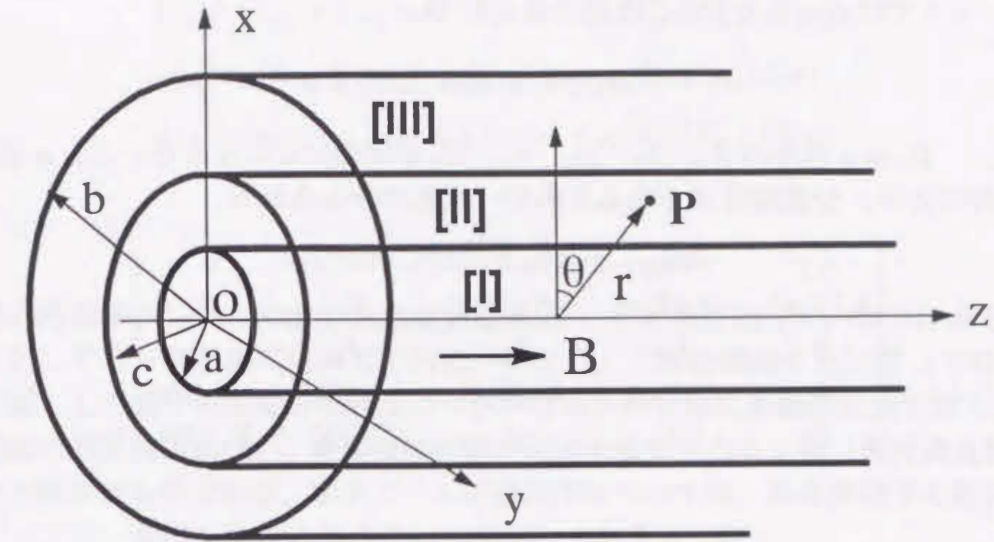


図 2.1: 電子ビームの存在する円筒プラズマの境界条件 [I] は電子ビームとプラズマ, [II] はプラズマのみ, [III] は真空の領域である。B は磁界で  $z$  軸の正方向に向いている。

ここで、 $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  は定数、

$$T_1 = \beta \sqrt{\frac{\epsilon_{zz1}}{\epsilon_{z\theta1}}}, \quad T_2 = \beta \sqrt{\frac{\epsilon_{zz2}}{\epsilon_{z\theta2}}}, \quad T_3 = \beta \quad (2.17)$$

である。

次に、境界条件に従い、 $r = 0$  に於いて電位  $\phi$  が有限であることから、 $K_n(0) = \infty$  を考えれば、

$$B_1 = 0 \quad (2.18)$$

$r = a$  では、

$$\epsilon_{rr1} T_1 \{A_1 I'_n(T_1 a) + B_1 K'_n(T_1 a)\} + \epsilon_{r\theta1} \frac{n}{a} \{A_1 I_n(T_1 a) + B_1 K_n(T_1 a)\} \quad (2.19)$$

$$= \epsilon_{rr2} T_2 \{A_2 I'_n(T_2 a) + B_2 K'_n(T_2 a)\} + \epsilon_{r\theta2} \frac{n}{a} \{A_2 I_n(T_2 a) + B_2 K_n(T_2 a)\} \quad (2.20)$$

及び

$$A_1 I_n(T_1 a) + B_1 K_n(T_1 a) = A_2 I_n(T_2 a) + B_2 K_n(T_2 a) \quad (2.21)$$

$r = c$  では、

$$\epsilon_{rr2} T_2 \{A_2 I'_n(T_2 c) + B_2 K'_n(T_2 c)\} + \epsilon_{r\theta2} \frac{n}{c} \{A_2 I_n(T_2 c) + B_2 K_n(T_2 c)\} \quad (2.22)$$

$$= \epsilon_{rr3} T_3 \{A_3 I'_n(T_3 c) + B_3 K'_n(T_3 c)\} + \epsilon_{r\theta3} \frac{n}{c} \{A_3 I_n(T_3 c) + B_3 K_n(T_3 c)\} \quad (2.23)$$

及び

$$A_2 I_n(T_2 c) + B_2 K_n(T_2 c) = A_3 I_n(T_3 c) + B_3 K_n(T_3 c) \quad (2.24)$$



また,  $r = b$  では  $\phi = 0$  とすることができるので,

$$A_3 I_n(\beta b) + B_3 K_n(\beta b) = 0 \quad (2.25)$$

となる。  $B_1 = 0$  以外の  $A_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  が同時に 0 にならないことが波動の存在する条件であり, 分散関係式となるもので, 次式で与えられる。

$$\begin{vmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} & 0 & 0 \\ I_n(T_1 a) & -I_n(T_2 a) & -K_n(T_2 a) & 0 & 0 \\ 0 & J_{32} & J_{33} & -J_{34} & -J_{35} \\ 0 & I_n(T_2 c) & K_n(T_2 c) & -I_n(\beta c) & -K_n(\beta c) \\ 0 & 0 & 0 & I_n(\beta b) & K_n(\beta b) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.26)$$

ここで,

$$J_{11} = \varepsilon_{rr1}(T_1 a) I'_n(T_1 a) + \varepsilon_{r\theta 1} n I_n(T_1 a) \quad (2.27)$$

$$J_{12} = \varepsilon_{rr2}(T_2 a) I'_n(T_2 a) + \varepsilon_{r\theta 2} n I_n(T_2 a) \quad (2.28)$$

$$J_{13} = \varepsilon_{rr2}(T_2 a) K'_n(T_2 a) + \varepsilon_{r\theta 2} n K_n(T_2 a) \quad (2.29)$$

$$J_{32} = \varepsilon_{rr2}(T_2 c) I'_n(T_2 c) + \varepsilon_{r\theta 2} n I_n(T_2 c) \quad (2.30)$$

$$J_{33} = \varepsilon_{rr2}(T_2 c) K'_n(T_2 c) + \varepsilon_{r\theta 2} n K_n(T_2 c) \quad (2.31)$$

$$J_{34} = \varepsilon_{rr3}(\beta c) I'_n(\beta c) + \varepsilon_{r\theta 3} n I_n(\beta c) \quad (2.32)$$

$$J_{35} = \varepsilon_{rr3}(\beta c) K'_n(\beta c) + \varepsilon_{r\theta 3} n K_n(\beta c) \quad (2.33)$$

上の分散関係式を, 次の変形 Bessel 関数に関する公式により, 微分係数を含まない形に変えておく。変形 Bessel 関数の次数  $n$  を正負についての公式も, 計算プログラムに於ける便利さのためにあげておこう。

$$z I'_n(z) = n I_n(z) + z I_{n+1}(z) \quad (2.34)$$

$$z K'_n(z) = n K_n(z) - z K_{n+1}(z) \quad (2.35)$$

$$I_{-n}(z) = I_n(z), \quad K_{-n}(z) = K_n(z) \quad (2.36)$$

すると, 分散関係式は

$$\begin{vmatrix} L_{11} & -L_{12} & -L_{13} & 0 & 0 \\ I_n(T_1 a) & -I_n(T_2 a) & -K_n(T_2 a) & 0 & 0 \\ 0 & L_{32} & L_{33} & -L_{34} & -L_{35} \\ 0 & I_n(T_2 c) & K_n(T_2 c) & -I_n(\beta c) & -K_n(\beta c) \\ 0 & 0 & 0 & I_n(\beta b) & K_n(\beta b) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.37)$$

ここで,

$$L_{11} = (\varepsilon_{rr1} + \varepsilon_{r\theta 1}) n I_n(T_1 a) + \varepsilon_{rr1}(T_1 a) I_{n+1}(T_1 a) \quad (2.38)$$

$$L_{12} = (\varepsilon_{rr2} + \varepsilon_{r\theta 2}) n I_n(T_2 a) + \varepsilon_{rr2}(T_2 a) I_{n+1}(T_2 a) \quad (2.39)$$

$$L_{13} = (\varepsilon_{rr2} + \varepsilon_{r\theta 2}) n K_n(T_2 a) - \varepsilon_{rr2}(T_2 a) K_{n+1}(T_2 a) \quad (2.40)$$

$$L_{32} = (\varepsilon_{rr2} + \varepsilon_{r\theta 2}) n I_n(T_2 c) + \varepsilon_{rr2}(T_2 c) I_{n+1}(T_2 c) \quad (2.41)$$

$$L_{33} = (\varepsilon_{rr2} + \varepsilon_{r\theta 2}) n K_n(T_2 c) - \varepsilon_{rr2}(T_2 c) K_{n+1}(T_2 c) \quad (2.42)$$

$$L_{34} = n I_n(\beta c) + (\beta c) I_{n+1}(\beta c) \quad (2.43)$$

$$L_{35} = n K_n(\beta c) - (\beta c) K_{n+1}(\beta c) \quad (2.44)$$

各領域の誘電率テンソルの成分を真空誘電率  $\varepsilon_0 = 1$  と規格化して, 以下に示しておこう。規格化しても分散関係式は同じである。ただし, これを導出するに際しての仮定は, 小振幅波動として電子の運動方程式及びマクスウェルの方程式を線形近似で解く, 温度・イオン運動の効果は入れない, 衝突項は波動の減衰を表す単なる定数(衝突周波数)とする, という簡単なものである。電子ビームの誘電率については, 静止座標での数式に, 周波数のドップラー変位を取り入れることで対応してある。

$$\varepsilon_{rr1} = 1 + \frac{\omega_{pe1}^2 (\omega + j\nu_1)}{\omega \{\omega_{ce}^2 - (\omega + j\nu_1)^2\}} + \frac{\omega_{pb}^2 \{(\omega - \beta V) + j\nu_1\}}{(\omega - \beta V) [\omega_{ce}^2 - \{(\omega - \beta V) + j\nu_1\}^2]} \quad (2.45)$$

$$\varepsilon_{r\theta 1} = \frac{\omega_{pe1}^2 \omega_{ce}}{\omega \{\omega_{ce}^2 - (\omega + j\nu_1)^2\}} + \frac{\omega_{pb}^2 \omega_{ce}}{(\omega - \beta V) [\omega_{ce}^2 - \{(\omega - \beta V) + j\nu_1\}^2]} \quad (2.46)$$

$$\varepsilon_{zz1} = 1 - \frac{\omega_{pe1}^2}{\omega(\omega + j\nu_1)} - \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - \beta V) \{(\omega - \beta V) + j\nu_1\}} \quad (2.47)$$

$$\varepsilon_{rr2} = 1 + \frac{\omega_{pe2}^2 (\omega + j\nu_2)}{\omega \{\omega_{ce}^2 - (\omega + j\nu_2)^2\}} \quad (2.48)$$

$$\varepsilon_{r\theta 2} = \frac{\omega_{pe2}^2 \omega_{ce}}{\omega \{\omega_{ce}^2 - (\omega + j\nu_2)^2\}} \quad (2.49)$$

$$\varepsilon_{zz2} = 1 - \frac{\omega_{pe2}^2}{\omega(\omega + j\nu_2)} \quad (2.50)$$

当然のことであるが, [III] の真空領域では次のようになる。

$$\varepsilon_{rr3} = 1 \quad (2.51)$$

$$\varepsilon_{r\theta 3} = 0 \quad (2.52)$$

$$\varepsilon_{zz3} = 1 \quad (2.53)$$

数値計算しやすいように, これら誘電率テンソル成分を次のように規格化しておこう。規格化は各周波数だけでなく, 波数, 電子ビームの速さについても行っている。

$$\varepsilon_{rr1} = 1 + \frac{W_{pe1}^2 (W + jN_1)}{W \{1 - (W + jN_1)^2\}} + \frac{W_{pb}^2 \{(W - KU) + jN_1\}}{(W - KU) [1 - \{(W - KU) + jN_1\}^2]} \quad (2.54)$$



$$\varepsilon_{r\theta 1} = 1 + \frac{W_{pe1}^2}{W \{1 - (W + jN_1)^2\}} + \frac{W_{pb}^2}{(W - KU) [1 - \{(W - KU) + jN_1\}^2]} \quad (2.55)$$

$$\varepsilon_{zz1} = 1 - \frac{W_{pe1}^2}{W(W + jN_1)} - \frac{W_{pb}^2}{(W - KU) \{(W - KU) + jN_1\}} \quad (2.56)$$

$$\varepsilon_{rr2} = 1 + \frac{W_{pe2}^2(W + jN_2)}{W \{1 - (W + jN_2)^2\}} \quad (2.57)$$

$$\varepsilon_{r\theta 2} = 1 + \frac{W_{pe2}^2}{W \{1 - (W + jN_2)^2\}} \quad (2.58)$$

$$\varepsilon_{zz2} = 1 - \frac{W_{pe2}^2}{W(W + jN_2)} \quad (2.59)$$

ここで,

$$W = \frac{\omega}{\omega_{ce}}, \quad W_{pb} = \frac{\omega_{pb}}{\omega_{ce}}, \quad K = \beta b, \quad U = \frac{V}{\omega_{ce} b} \quad (2.60)$$

$$W_{pe1} = \frac{\omega_{pe1}}{\omega_{ce}}, \quad W_{pe2} = \frac{\omega_{pe2}}{\omega_{ce}}, \quad N_1 = \frac{\nu_1}{\omega_{ce}}, \quad N_2 = \frac{\nu_2}{\omega_{ce}} \quad (2.61)$$

とおいた。 $\omega_{ce} = \frac{eB}{m}$  は電子サイクロトロン周波数,  $\omega_{pe1} = \sqrt{\frac{e^2 n_{e1}}{\varepsilon_0 m_e}}$  及び  $\nu_1$  はそれぞれ領域 [I] の電子プラズマ周波数, 電子衝突周波数で,  $\omega_{pe2} = \sqrt{\frac{e^2 n_{e2}}{\varepsilon_0 m_e}}$  及び  $\nu_2$  はそれぞれ領域 [II] の電子プラズマ周波数, 電子衝突周波数である。なお,  $e, m$  は電子の電荷量, 質量,  $\varepsilon_0$  は真空誘電率,  $n_{e1}, n_{e2}$  は領域 [I], II の電子密度とする。また,  $B$  は背景磁界の磁束密度,  $V$  は電子ビームの速さである。

さて, 上で得られている分散関係式をさらに整理して簡単化すれば, 次のようになる。

$$D(W, K) = \begin{vmatrix} R_{11} & \varepsilon_{rr2} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 1 \\ \frac{I_n(T_2 c)}{I_n(T_2 a)} & R_{32} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_n(\beta b)}{I_n(\beta c)} & R_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.62)$$

ここで,

$$\begin{aligned} R_{11} &= n(\varepsilon_{rr1} + \varepsilon_{r\theta 1} - \varepsilon_{rr2} - \varepsilon_{r\theta 2}) \\ &\quad + \varepsilon_{rr1}(T_1 a) \frac{I_{n+1}(T_1 a)}{I_n(T_1 a)} - \varepsilon_{rr2}(T_2 a) \frac{I_{n+1}(T_2 a)}{I_n(T_2 a)}, \\ R_{21} &= \varepsilon_{rr2}(T_2 c) \frac{I_{n+1}(T_2 c)}{I_n(T_2 a)}, \\ R_{22} &= -\varepsilon_{rr2}(T_2 c) \{I_{n+1}(T_2 c) K_n(T_2 a) \\ &\quad + I_n(T_2 a) K_{n+1}(T_2 c)\}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$R_{23} = n(\varepsilon_{rr2} + \varepsilon_{r\theta 2} - 1) - \beta c \frac{I_{n+1}(\beta c)}{I_n(\beta c)}, \quad (2.64)$$

$$R_{32} = I_n(T_2 a) K_n(T_2 c) - I_n(T_2 c) K_n(T_2 a), \quad (2.65)$$

$$R_{44} = I_n(\beta c) K_n(\beta b) - I_n(\beta b) K_n(\beta c) \quad (2.66)$$

である。なお, 式の簡単化には次の公式を用いた。

$$I_n(z) K_{n+1}(z) + I_{n+1}(z) K_n(z) = \frac{1}{z} \quad (2.67)$$

分散曲線の数値計算は, 実験に対応する物理パラメータのもとで, この分散関係式  $D(W, K) = 0$  を満足する規格化周波数  $W$  と規格化波数  $K$  を求めればよい。

## 2.2 計算方法

### 2.2.1 総当たり法

波動成長率を求めるためには, 変形 Bessel 関数が含まれている分散関係式を, 複素数で解き, その解の虚数部を知る必要がある。境界が無限とする簡単な分散関係式であれば, 代数方程式となるので, これまでにもその複素解が求められている。また, その分散関係式の解に, 波長がプラズマの大きさ以下という制約を与えることで, 境界の影響を取り入れ, より現実に近い分散関係式を導くことも試みられている。Trivelpiece と Gould により計算された円筒プラズマについての Bessel 関数を含んだ分散関係式は実数計算のみであるが, 境界条件をまともに与えており, 少なくとも, 波動伝搬については後進波の存在や偏波の議論が実験とかなり一致する。しかし, こうした分散関係式はどれも簡単な曲線ではなく, T-G モードの波動を複素数で解く場合にはかなり複雑になることが予想される。したがって, 方程式の解法としては, 必要とする範囲にあるすべての複素解を, 適当な刻み幅で, 総当たりに代入して満足する解を拾い出す, という単純な方法に頼るのが安全である。計算時間が膨大になるという欠点はあるが, これ以外に根本的によりよい解法は, 今のところなさそうである。

さて, 分散関係式の具体的な解の探索法について述べよう。図 2.2 に示すように,  $K$  の値を固定し,  $\Delta WR$  (実数部) 及び  $\Delta WI$  (虚数部) の刻み幅で, 必要な  $W$  平面のすべての点に於いて, 絶対値  $|D(W, K)|$  を計算し, それが 0 となる  $W$  を複素解とする。

しかし, 飛び飛びの点を計算して絶対値が 0 となる解の発見はまれであるので,  $|D(W, K)|$  が最小値となる点を求めてこれを近似解とする。ただし, 最小値には絶対値が 0 でない極小値 (偽の解) の場合があり, それは除外しておかねばならない。このため最小値とする  $W$  を見つけたなら, この  $W$  の周辺で  $D(W, K)$  の実数部と虚数部の正負の変化を調べ, 近傍に絶対値を 0 とする点があることを確認した上で近似解とする。

計算精度を高め, また同時に, 解の取りこぼしを減らすには, 刻み幅を小さくしなければならないが, 計算を  $K$  (1 次元)  $\times W$  (2 次元) のすべての点で行わねばならず, 時間的な制約からむやみに小さくはできない。実際のところ分散関係曲線を滑らかに表示する



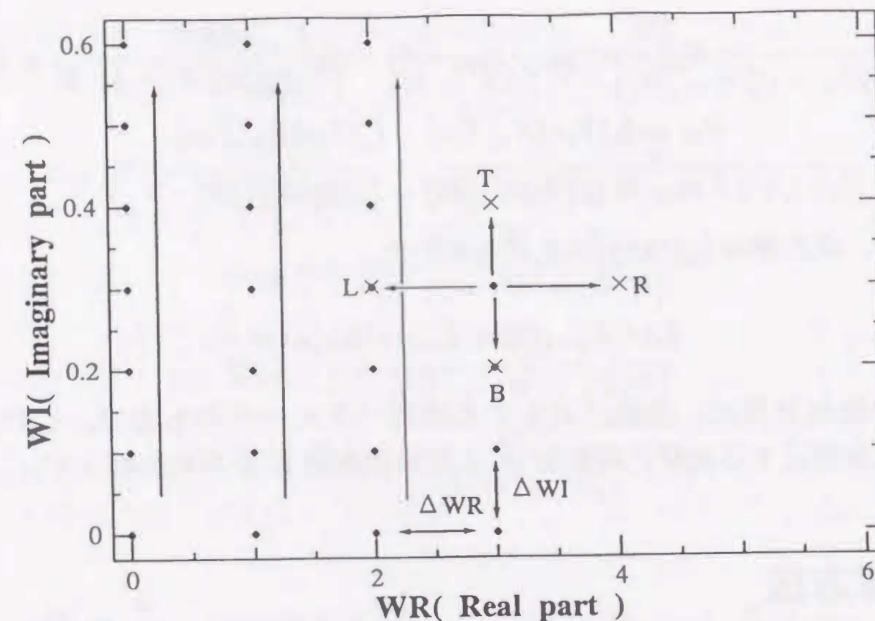


図 2.2: 複素平面上での解探索 必要とする範囲を矢印に沿って、まず分散関係式の絶対値を最小にする点を探す。次に、その点の近傍に於ける分散関係式の実数部と虚数部の符号変化から近似解を求める。

程度の刻み幅でも計算時間はかなり必要となる。そこで、解の取りこぼし対策には無力であるが、解の周辺で刻み幅を必要なまで自動的に小さくし、解の精度だけは上げておく。その方法は、図 ref 解精度に示すとおりで、まず、近似解 C の周辺 8 点についてそれまでの刻み幅を二分の一に縮小して、 $|D(W, K)|$  が最小値となる点を求める。いわゆるはさみ打ち法である。次に、その近傍での  $D(W, K)$  の実数部と虚数部の正負の変化を調べ、解である確認を行う。これを繰り返す。

### 2.2.2 分散関係図の表示

波動解を式 (2.5) と定義したので、 $W$  の虚数部が負のときに波動が成長し、正のときに減衰する。物理的に考えて、温度、粒子衝突などのない可逆的な波動現象である場合は、波動解に成長と減衰の項が必ず同時に含まれる。すなわち、分散関係図に於いて、衝突周波数が 0 であるなら、 $W$  の虚数部は波数  $K$  軸対称（複素共役）となり、虚数部の正負を同時に表すのは無駄になる。そこで、表示スペースのこともあり、虚数部については通常正領域で波動成長を示すことが多い。これに合わせるために、衝突周波数が 0 でないときも、見かけ上波動成長が正領域になるよう、 $W$  の虚数部曲線の正負をプログラム上で入れ替えておく。もっとも、式 (2.5) は Trivelpiece と Gould に従ったまでのことで、定義式を変えておけば済むことである。

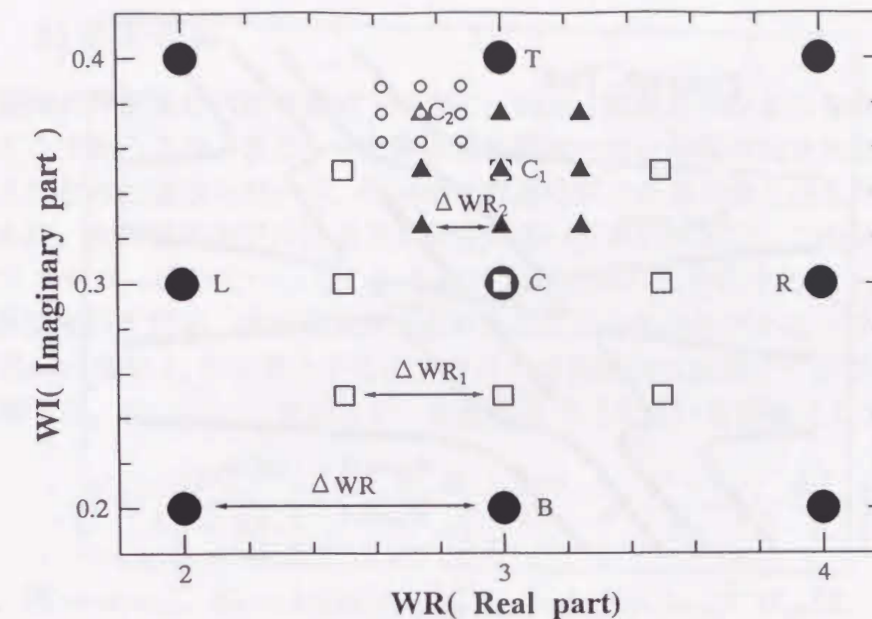


図 2.3: 近似解からはさみうち法により精度を上げる。

## 2.3 プログラム試験

計算プログラムは FORTRAN 言語で作成した。プログラム構成は次のようになっている。分散関係式の数値計算の部分、簡単な分散関係式や粒子モデルによる分散関係式に入れ替えることで、プログラムが正しいものか、また、解の取りこぼしが、分割数に応じて、どの程度なのか試験した。

### ● 主プログラム

- データの入力と計算結果の出力
- 各点総当たりと計算進行状況表示

### ● 副プログラム

- 分散関係式の数値計算
- 複素面での解決定
- 解の精度向上
- 複素 Bessel 関数 (D.E.Amos, Sandi National Laboratories によるものを使用)

### 2.3.1 簡単な例

電子ビーム・プラズマ不安定を議論するときに、しばしば用いられる次の簡単な分散関係式を用いて、プログラムの妥当性と複素解を求めるに現実的な実行時間で計算可能かど



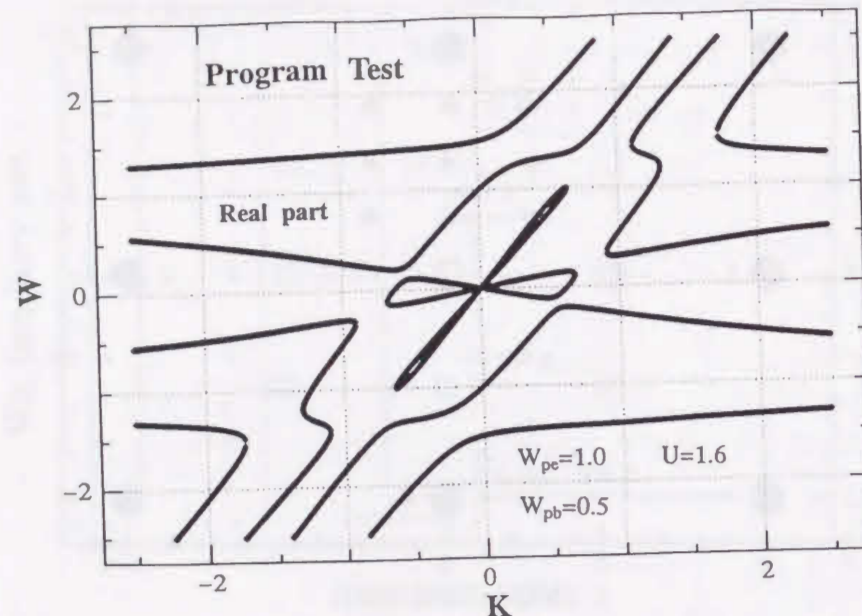


図 2.4: 簡易に境界条件を入れた分散関係式を用いてプログラムの試験を行う。得られた分散関係曲線は、電子ビーム・プラズマ放電の議論でしばしば示されるもの一致し、後に示す T-G モードの特徴を大まかに示している。

うか調べてみた。この分散関係式はイオン運動を無視してあり、境界条件は簡易的に入っているものである。

$$p^2 \left\{ 1 - \frac{W_{pe}^2}{W^2 - 1} - \frac{W_{pb}^2}{(W - KU)^2 - 1} \right\} + K^2 \left\{ 1 - \frac{W_{pe}^2}{W^2} - \frac{W_{pb}^2}{(W - KU)^2} \right\} = 0 \quad (2.68)$$

ここで、 $W = \omega/\omega_{ce}$ 、 $K = k/c$ 、 $W_{pe} = \omega_{pe}/\omega_{ce}$ 、 $W_{pb} = \omega_{pb}/\omega_{ce}$ 、 $U = u/\omega_{ce}c$  はそれぞれ、電子サイクロトロン周波数  $\omega_{ce}$  で規格化された周波数、波数、電子プラズマ周波数、ビーム電子プラズマ周波数、ビーム電子速度であり、 $c$  はプラズマ半径、 $p = 2.405/c$  は Bessel 関数  $J_0(p) = 0$  となるもっとも 0 に近い零点である。なお、電子ビームとプラズマ半径は同じである。

図 2.4 は  $W_{pe} = 1.0$ 、 $W_{pb} = 0.5$ 、 $U = 1.6$  としたときの計算結果 ( $W$  の実数部のみとして虚数部は省略) である。これは、例えば、Cabral 等 [21, 40] のものと一致しており、採用した総当たり計算に全く問題はないといえる。本来、解はとびとびの点であるが、計算点を数多くすると、図 2.4 のようにきれいに曲線表示される。解の取りこぼしさえなければ、余り細かい計算は無駄となるが、この例では、その取りこぼしの心配はほとんどなく、曲線に見える程度の間隔で計算をすればよい。精度確保に 20 回程度の繰り返し計算をしても、この程度の分散関係式を計算するにはパーソナル・コンピュータ (Pentium 200MHz) の能力で十分間に合う。

### 2.3.2 粒子モデル

分散関係式が簡単な代数方程式ではなく、Bessel 関数を含むような計算手数のかかるものならどうであろうか。また、分散関係式が間隔の狭い曲線の集まりを持つものなら、分解能を上げなければならないが、現実的な計算時間で計算可能となるだろうか。これを調べるために、次の粒子モデルによる分散関係式の計算を試みた。この分散関係式は磁界のあるプラズマ中 (電子ビームなし) を磁界方向に斜めに進行する電子波を表すものである。境界は無限大だが、温度効果及び磁界の存在は特殊関数であるプラズマ分散関数  $Z[5]$  と変形 Bessel 関数  $I_n$  を必要とする。プラズマ分散関数の計算プログラムは渡辺 [44] のものを使用する。 $N_{max} = \infty$  であるが、数値計算では大きい有限値にしておけばよい。

$$1 + \frac{2W_{pe}^2}{K_{\parallel}^2 + K_{\perp}^2} \left\{ 1 + e^{-\frac{K_{\perp}^2}{2}} \frac{W}{K_{\parallel}} \sum_{n=-N_{max}}^{N_{max}} Z\left(\frac{W-n}{K_{\parallel}}\right) I_n\left(\frac{K_{\perp}^2}{2}\right) \right\} = 0 \quad (2.69)$$

ここで、 $W = \omega/\omega_{ce}$ 、 $K_{\parallel} = k_{\parallel}(v_{Te}/\omega_{ce})$ 、 $K_{\perp} = k_{\perp}(v_{Te}/\omega_{ce})$ 、 $W_{pe}$  は、サイクロトロン周波数  $\omega_{ce}$  とプラズマ電子の熱速度  $v_{Te}$  を用いて規格化したもので、それぞれ周波数、磁界に平行な波数、磁界に垂直な波数、電子プラズマ周波数である。

図 2.5 に  $W_{pe} = 0.3$ 、 $K_{\perp} = 0.15$ 、 $N_{max} = 10$  としたときの結果を示す。

計算点数は周波数の実数部  $WR = -1.5 \sim 1.5$  を 400 等分、虚数部  $WI = -1 \sim 1$  を 400 等分、波数  $K_{\parallel}$  を 500 等分している。さらに 20 回の繰り返し計算により解精度を上げている。計算結果は波数  $K_{\parallel} > 0$  のとき、周波数の虚数部  $WI < 0$  となっており、温度効果による波動の減衰が確かめられる。分散曲線が互いに接近して、計算の分解能に近づくと解が求まっていない。しかし、この分散関係式の様子は大体わかるし、より詳しく知りたければ、計算時間を節約するために、必要とする範囲だけを計算すればよい。この例では小形ワークステーション (VT Alpha 533MHz) を使用して約 6 時間の計算であった。今回は計画だけであったが、もう少し技巧的なプログラムにして、解のないところをスキップしたり、不鮮明な部分を指定して後から追計算できるようにするなら、かなりの効率化が図れるはずである。この試験結果によれば、多少の時間はかかるが、今やコンピュータ技術の進歩によって、T-G モードの複素数計算は、パーソナル・コンピュータを用いても十分可能なことがわかる。

## 2.4 T-G モードの計算結果

### 2.4.1 分散関係式と絶対値

図 2.6 に T-G の分散関係式に対する絶対値  $|D(W, K)|$  の様子を示す。解の取りこぼしがどのような状況で生じているかを確認する意味で計算してみた。この例は波数  $K=8$  で、他のパラメータは後に示す図 2.12 と同じにしてある。絶対値はかなり広範囲に変化するので  $\log[\log\{1 + |D(W, 8)|\}]$  のスケールで表示している。数多くのすり鉢状の谷があるが、その谷底が分散関係式の解になる。図 4 は見やすさのために刻み幅をそれほど小さくしていないので、解の取りこぼしが多くあり、刻み幅をさらに小さくすれば、より落



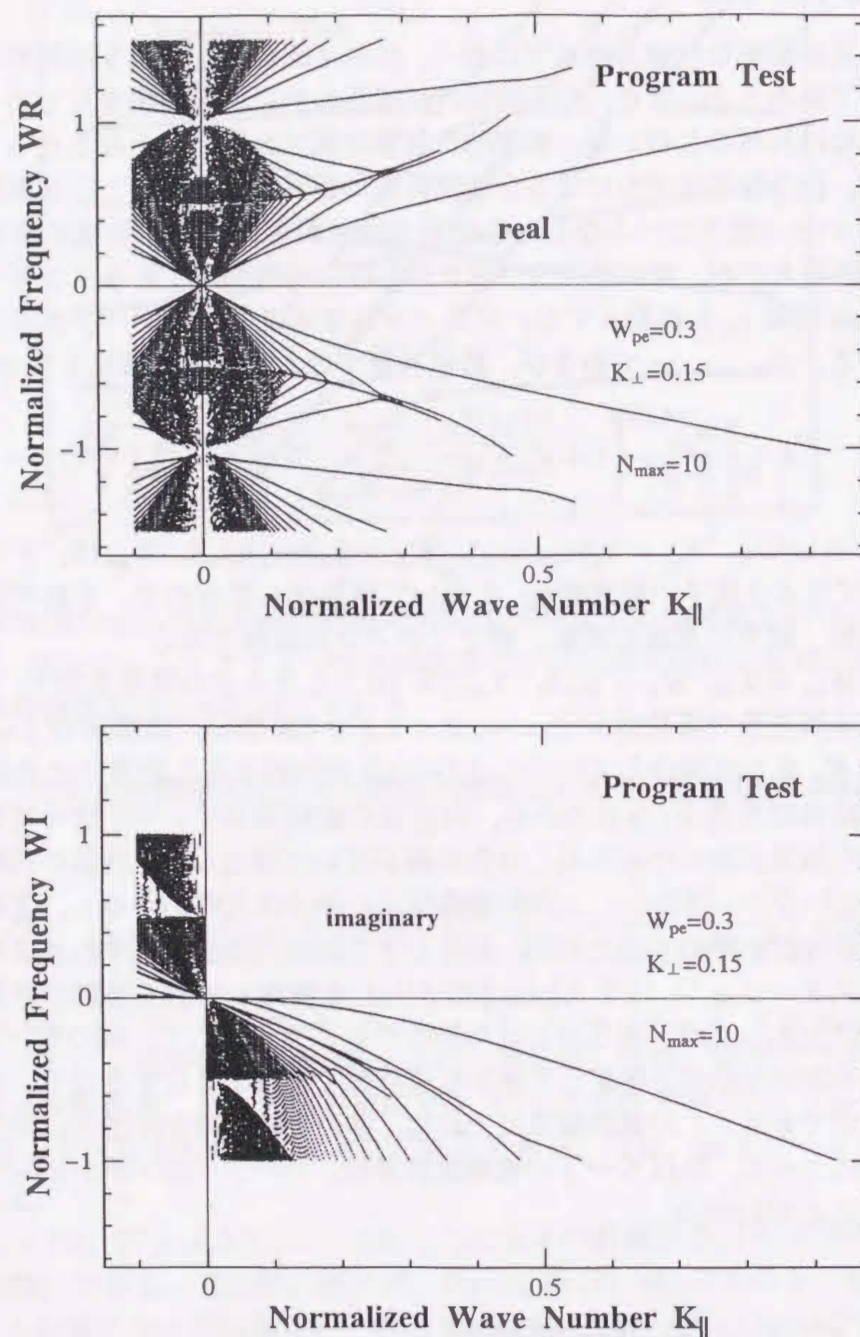


図 2.5: 磁界及び温度効果を考慮した粒子モデルによる分散関係式の試験 境界は無限大で、磁界に垂直成分の波数を持つ波動を表す。複素数の実数部が波動の周波数を、虚数部が減衰を表す。 $K_{\parallel} > 0$  のとき虚数部は負となっており、減衰のみが現れている。また、磁界に垂直に伝搬する波動の特徴である、電子サイクロトロン周波数（高調波も）に多くの曲線が集まっている。解の取りこぼしは、曲線が密集しなければ余りない。

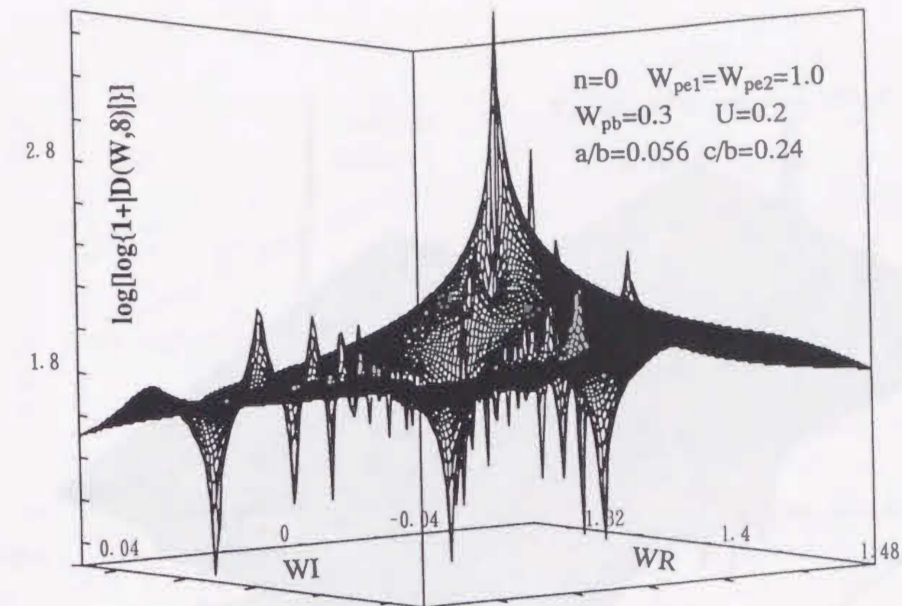


図 2.6: T-G モードに対する絶対値  $|D(W, K)|$  非常に鋭い谷（共振）や山（反共振）が数多く見られる。この谷が分散関係式を満たす解である。谷の鋭さが共振幅を決めており、波動の存在の安定さの目安になる。鋭くないものほど物理パラメータの変動に対し、波動は安定に存在できると考えられる。刻み幅を小さくすれば、次々に山、谷が現れる。

ち込みの鋭い谷（解）が次々に現れる。パラメータによっては、刻み幅を相当小さくしないと、取りこぼしの多いものがあり、十分注意する必要がある。取りこぼしは分散関係曲線の欠落部になる。しかし、物理的に解釈するなら、こうした抜け落ちやすい解はプラズマや電子ビームのパラメータ変動にかなり敏感であることを意味し、分散関係式の解としては不安定なものと逆に判定できる。すなわち、パラメータに揺らぎがあれば、波動の伝搬・励起は困難であるし、伝搬・励起があってもパラメータ変動のため波動はすぐに減衰するだろう。なお、図 2.6 に見られるように、すり鉢状の谷（共振）のすぐ隣には鋭い山（反共振）が必ず存在する。刻み幅を小さくするなら、谷だけでなくこうした山も次々に姿を現し、曲面は鋭いとげ状の凸凹を持つ相当複雑なものであることがわかる。

ここで、T-G モードの違いにより、すり鉢状の谷の様子が異なることを、波動成長率の大きい、 $n=0$  と  $n=1$  の例で示しておこう。図 2.7 は  $n=0$ （右回り波）の  $K=11$  と  $K=7$  に対する  $W$  の絶対値の様子である。いずれも、谷の落ち込みは比較的緩やかで、安定解になっている。a と示しところが分散関係式の解で、後で示すが、波動成長率の大きいところである。それ以外にも、 $W$  に虚数部のある解はいくつかある。図 2.8 は、 $K=7$  に対する  $W$  の絶対値である。上の図では、解は b と示してあるが、ほとんど見えない。中ほどの図では、この b の付近を少し拡大したもので、反共振の小さな山は見えるが谷は見えない。しかし、さらに下の図のように大きく拡大すると、山の隣に確かに谷が見える。しかも、注意すると、近くに山と谷の組が次々に存在するのがわかる。これらの解に対する成長率は大きいですが、谷の鋭さからすれば、 $n=0$  のものよりは不安定となる。図 2.9 は、同じく  $n=1$  の  $K=12$  に対する  $W$  の絶対値である。やはり、同じような様子になる。



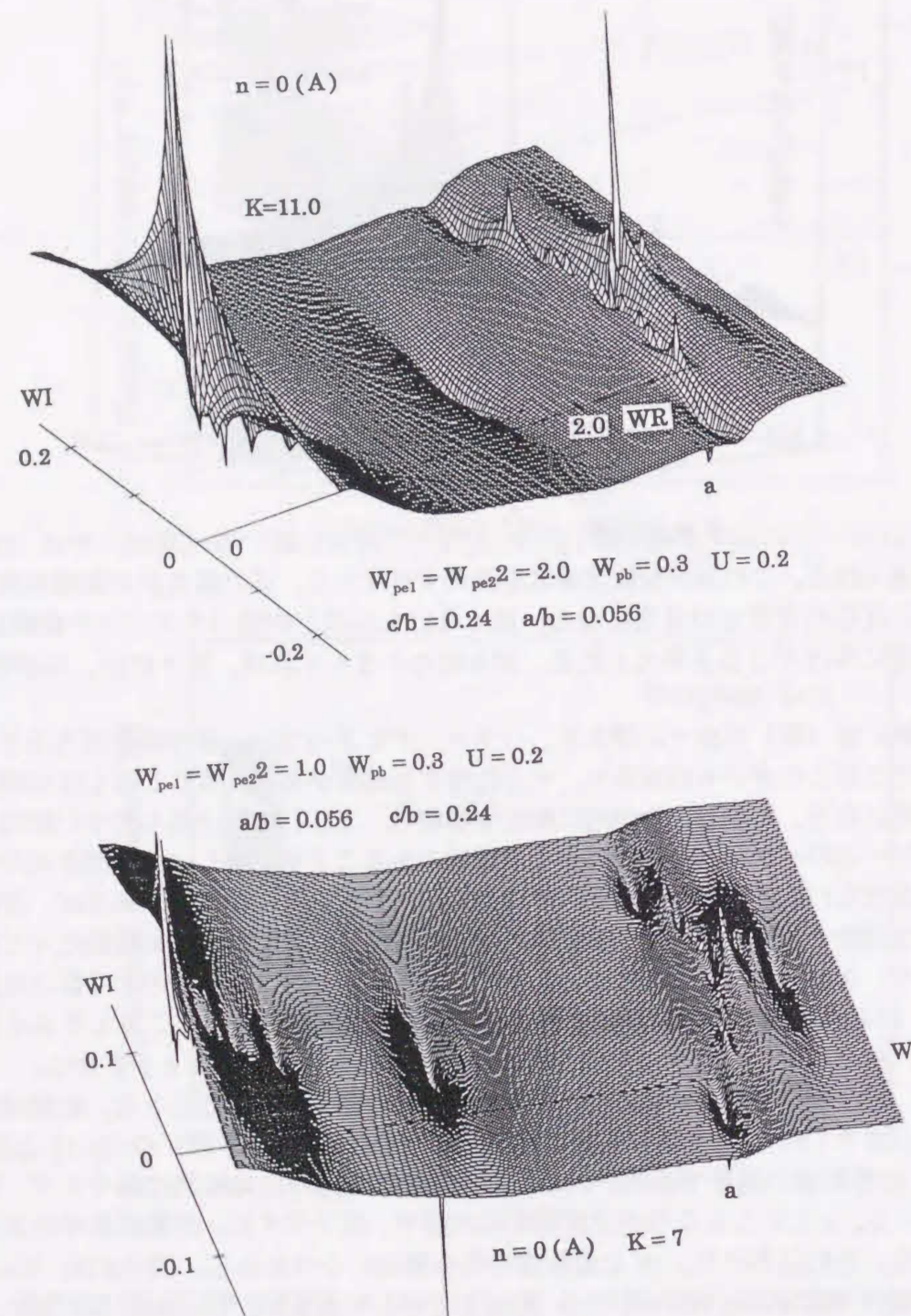


図 2.7: T-G モードの  $n=0$  に対する絶対値  $|D(W, 11)|$  および  $|D(W, 7)|$  解のある谷は鋭くなく、波動は安定と思われる。

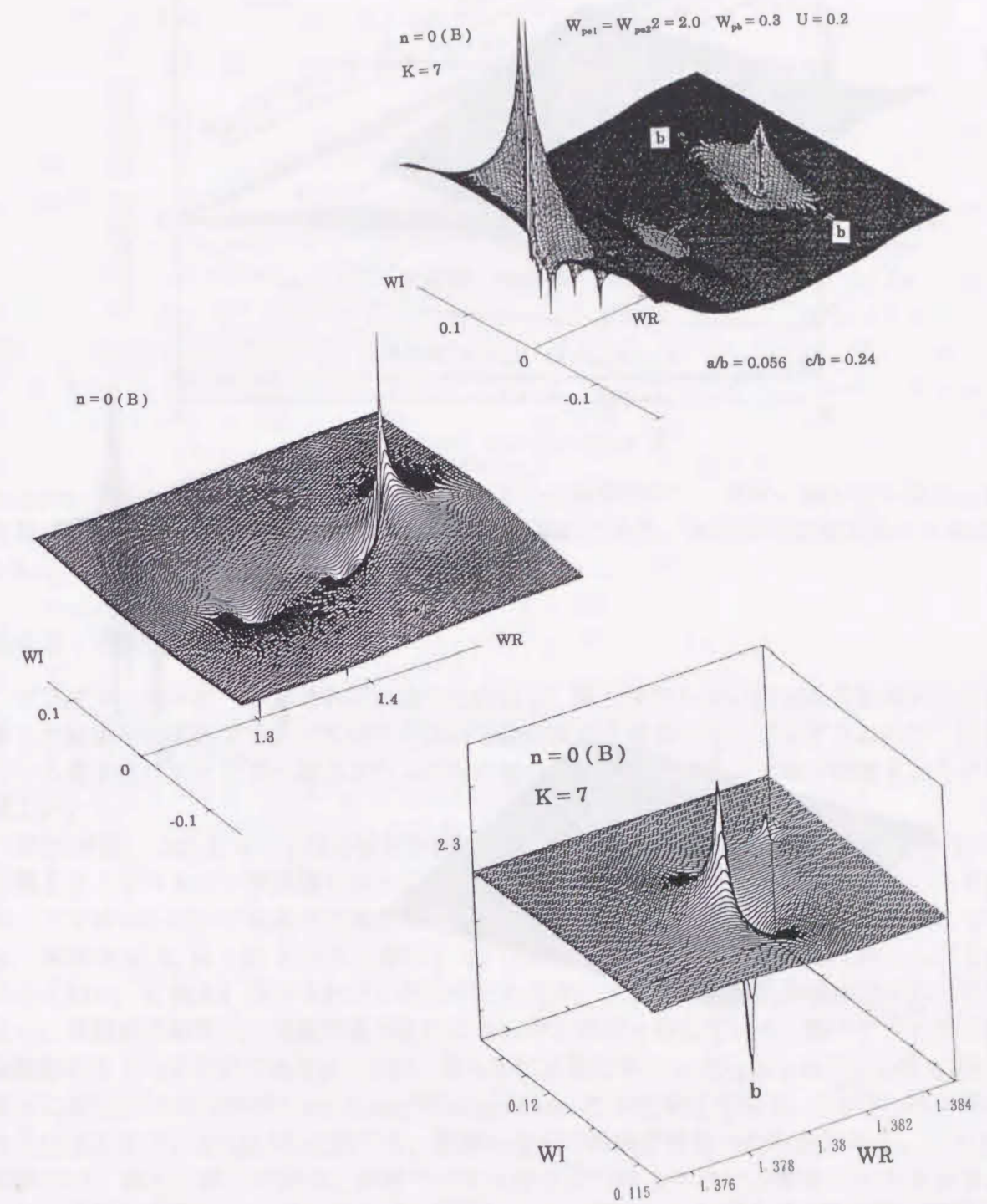


図 2.8: T-G モードの  $n=1$  に対する絶対値  $|D(W, 7)|$  解のある谷はかなり鋭く、 $n=0$  に比べて、波動は不安定となる。ただし、波動成長率は大きい。



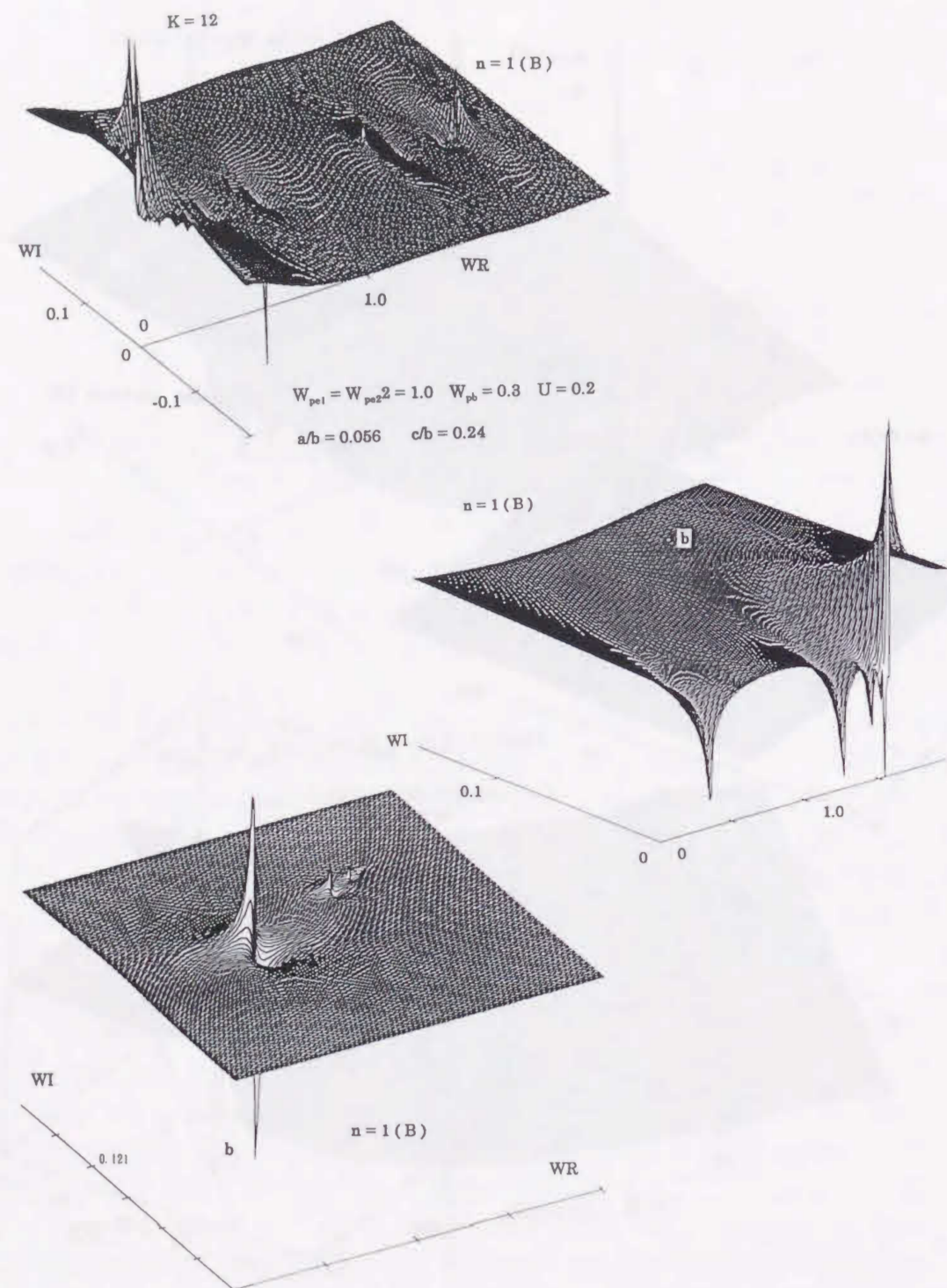


図 2.9: T-G モードの  $n=1$  に対する絶対値  $|D(W, 12)|$  となる。

図 2.8 とほぼ同様の性質と

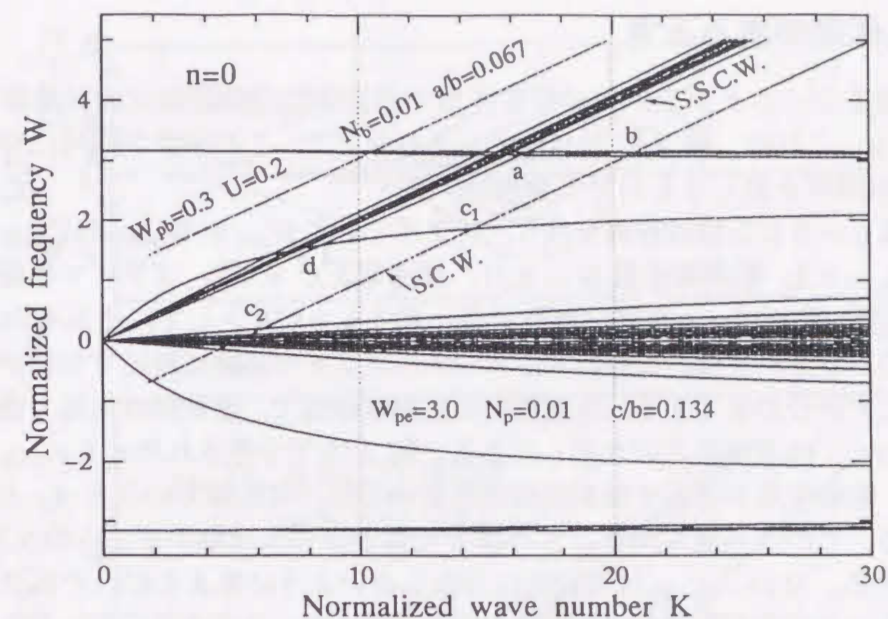


図 2.10: プラズマと電子の相互作用がないときの分散関係式 斜めに傾いているのが電子ビームの、そうでないのがプラズマの分散関係式である。相互作用が生じるとすれば、 $a, b, c_1, c_2, d$  の部分である。

#### 2.4.2 相互作用がないとき

プラズマと電子ビームがそれぞれ独立に存在し、相互作用しない場合の分散関係式を計算した結果を見てみよう。プラズマのみの分散関係式を得るには、プログラムのデータにビーム電子密度 0 と与え、電子ビームのみの場合はこの逆にプラズマ電子密度 0 と与えればよい。

図 2.10 は、これを  $n=1$  なる軸対称波の例で示したものである。ここで、周波数  $W=1$  は電子サイクロトロン周波数になっている。電子ビームについては斜めになっているものが、プラズマについては水平に横たわっているものが、それぞれの分散関係式を表している。衝突項を  $N_p = 0.01$  と小さな値にしているので、周波数  $K$  の虚数部はほとんど 0 になっており、 $K$  軸上に表示されているはずであるが、プラズマの分散曲線に隠されて見えない。実数部の結果は、実数計算 [60] によるものとほぼ一致している。電子ビームの分散曲線群の下半分が遅波であり、この内、最も下にあるのが Slow Cyclotron Wave (S.C.W.)、中心に近い下にあるのが Slow Space Charge Wave (S.S.C.W.) である。S.C.W. は一本のように見えるが、S.S.C.W. と同じく、無限に多くの曲線が集まったものである。しかし、実際には、取りこぼしがあり、曲線すべてを表すことはできない。電子ビームとプラズマの相互作用が起きるとするならば、電子ビームの遅波によるプラズマ波の励起であり、 $a, b, c_1, c_2, d$  の交点付近にその可能性がある。



### 2.4.3 相互作用があるとき

いよいよ、電子ビームとプラズマが相互作用するときの分散関係式の計算結果の例を図 2.11 に示そう。これは、図 2.10 のパラメータのもとで、この両者が同時に存在するときの T-G の分散関係を表したものである。

パラメータは  $n=0$  なる軸対称波であり、プラズマ密度  $W_{pe1} = W_{pe2} = W_{pe} = 3.0$ 、ビーム電子密度  $W_{pb} = 0.3$ 、衝突周波数  $N = 0.01$ 、加速電圧  $U = 0.2$ 、プラズマ半径/導体半径比  $c/b = 0.134$ 、電子ビーム半径/導体半径比  $a/b = 0.056$  として、それぞれ規格化をしている。このパラメータは、実際の電子ビーム・プラズマ実験に於いて放電が生じているときのものに大体合わせてある。周波数の実数部は細線で、虚数部は太線で表しているが、虚数部については上に拡大図を示してある。図 2.10 で予想された  $a, b, c_1, c_2, d$  の波動不安定のうち、波動成長率を示す虚数部の大きさからは、実数部でいうと  $A, B, D$  の部分が顕著である。このうち最も大きなものは  $A$  である。これは電子ビームの S.S.C.W. との相互作用による。なお、 $c_1, c_2$  は不安定は存在しないように見えるが、それはここで取り上げたパラメータでそうになっているだけのことであって、そう大きくないけれども、直ぐ後に別の例が示すように不安定は存在する。虚数部の  $A'$  に於いて、特に、きれいに現れているが、等高線のように何重にも取り囲んだところがある。これは導波管の理論によく似て高次の波動モードの存在によるもので、T-G モードの特徴である。

ところで、相互作用のない分散関係式から予想されたことであるが、 $W$  の実数部が負の範囲に波動不安定は全くない。波動成長率を求める場合には、 $W$  の実数部が正の範囲に限ることにして、計算時間を節約する。さらに、波動の伝搬損失がない、すなわち、衝突周波数が 0 である場合は、 $W$  の虚数部も正の範囲に限ることができる。後に示すが、衝突周波数が 0 のときに波動成長率が大きいところは、0 でないときにも波動成長率が大きく、その様子はよく似ている。そこで、衝突周波数が 0 について、波動不安定の性質を解析しておけば、電子ビーム・プラズマ放電の実験結果との比較検討は十分可能である。

なお、 $K$  が 0 に近づくと、高域混成周波数  $W_h = \sqrt{W_{ce}^2 + W_{pe}^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3.16$  に近づくと分散曲線が見られることを注意しておく。

## 2.5 波動不安定性と成長率

電子ビーム・プラズマ相互作用の波動について、衝突周波数を 0 として、さまざまな計算パラメータのもとで分散関係式を計算し、不安定性とその成長率の性質を調べてみる。電子ビーム・プラズマ放電の機構を解明するには、放電開始前に励起される波動のふるまいが重要な鍵であり、計算はその付近を特に詳しく行っている。

### 2.5.1 T-G モード

分散関係曲線に波動モードの違いがどのように反映されるかの例を、図 2.12 に示しておく。その計算パラメータは、放電直前に於ける代表的な実験値に合わせてあり、 $W_{pe1}=1.0$ 、

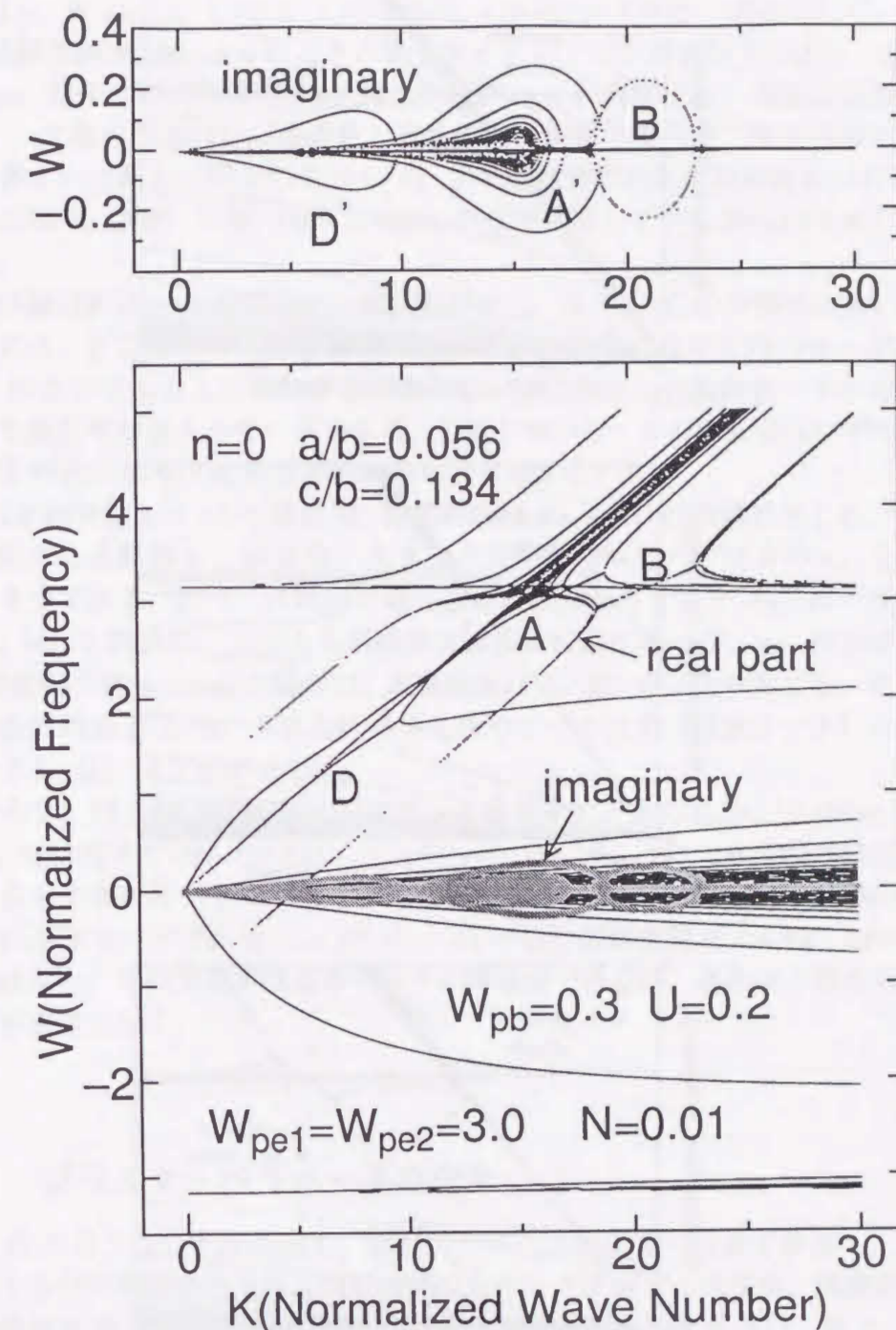


図 2.11: 電子ビーム・プラズマ相互作用による分散関係 これは前に上げた相互作用なしのパラメータと全く同じ状況で、相互作用があるときのもの。  $W$  の虚数部の大きいものが不安定性が大きく、強力な波動励起が生じる。虚数部の拡大図を上にしてあるが、 $A'$  (実数部では  $A$ ) に於ける波動成長率が高い。これは S.S.C.W. によるものである。 $B'$  (実数部では  $B$ ) は S.C.W. による励起を表す。しかし、取りこぼしが多く見られ、 $A'$  に比べて、成長率はそう低くないが、安定性の面ではかなり劣る。



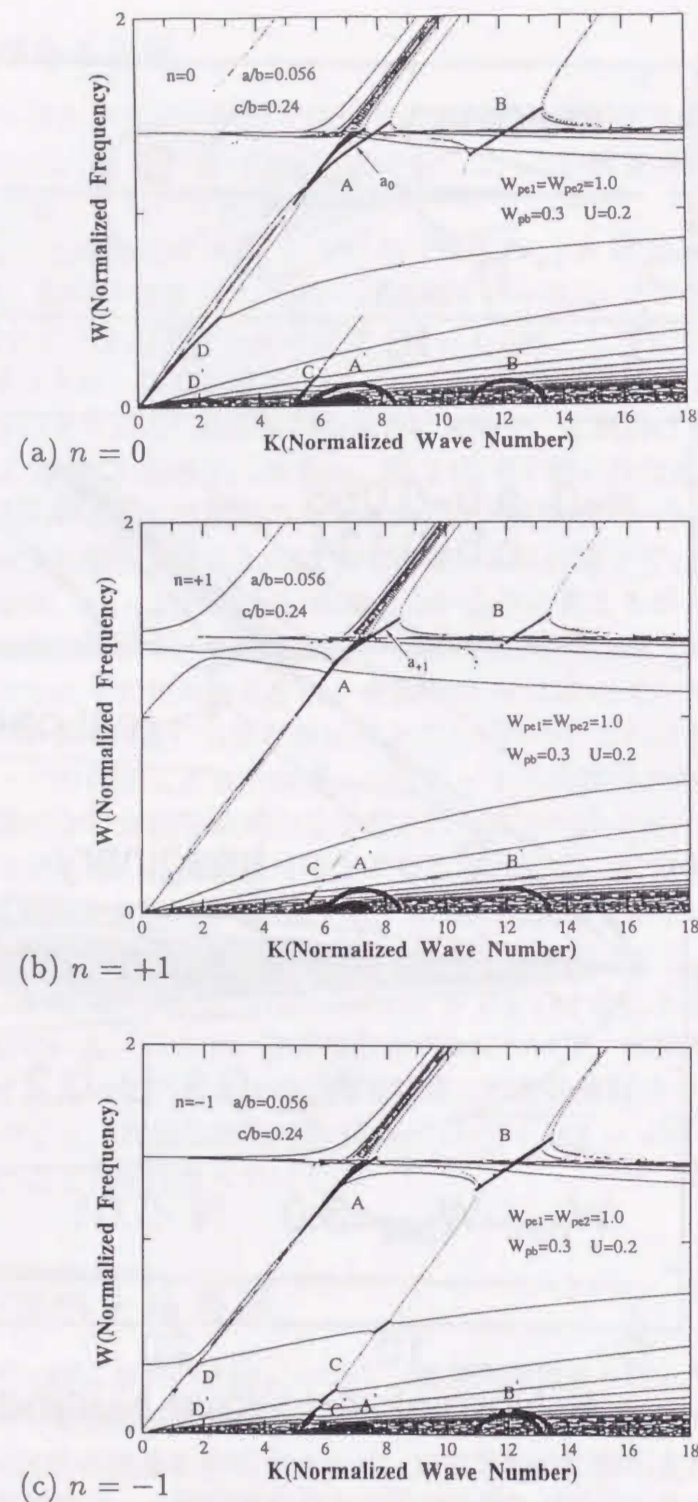


図 2.12: T-G モードの分散関係式 パラメータを電子ビーム放電開始前の実験に合わせ、(a), (b), (c) は、それぞれ軸対称波、右回り波、左回り波と偏波の異なる計算結果である。いずれも、領域 A, B に於いて成長率が大きく、実験に於いて波動励起の起きる可能性が高い。成長率の大きさはプラズマ、電子ビームの状態だけでなく、偏波にもよる。パラメータを変えて、数多くの分散関係図より成長率を読みとることから、励起波動の性質を調べる。

$W_{pe2}=1.0$ ,  $W_{pb}=0.3$ ,  $U=0.2$ ,  $a/b=0.056$ ,  $c/b=0.24$  である。規格化しているので周波数  $W=1$  は磁界強度 100gauss のときの電子サイクロトロン周波数 280MHz, 波数  $K=5$  は波長 10cm, 電子ビーム速度  $U=0.2$  は  $2.5 \times 10^7$  m/s に対応する。細線は受動的な波動伝搬 (実数), 太線は波動励起 (複素数: 実数部は中太線で周波数, 虚数部は太線で時間的成長率を表す) である。図 2.12 に於いて、正の虚数部があれば励起波動は存在する。なお、この例では  $K(360) \times W(600 \times 600)$  の点で計算しているがそれでもかなりの欠落部がある。

(a) は軸対称波  $n=0$  の場合で、波動励起は A, B, C, D の各領域に於いて生じる。そのうちの A, B に対応する虚数部  $A'$ ,  $B'$  から、大きな成長率を持つモードは A に属する  $a_0$  と B の 2 つであることがわかる。ただし、B は接近した複素モードから成るので、その中でも成長率が最大のモードとする。この 2 つのモードの周波数はいずれも高域混成周波数  $\sqrt{2}$  付近にあり、 $a_0$  の方が B のものより低い。

(b) は右回り波  $n=+1$  の場合で、波動励起は A, B, C の領域で生じる。そのうちの A, B に対応する虚数部  $A'$ ,  $B'$  から、大きな成長率を持つモードは A の  $a_{+1}$  と B (複素モード) の 2 つである。ただ、B は解の取りこぼし状況からすると (a) ほど安定でない。周波数は、(a) と同様に、2 つとも高域混成周波数付近にあつて、 $a_{+1}$  の方が B より低い。

(c) は左回り波  $n=-1$  の場合で、波動励起は A, B, C, D で生じる。そのうちの B に対応する虚数部  $B'$  から、大きな成長率を持つモードは B (複素モード) のみである。このモードも (a) ほど安定でない。

ところで、図 2.12 のすべてに於いて、A は電子ビームの S.S.C.W. (Slow Space Charge Wave), B は電子ビームの S.C.W. (Slow Cyclotron Wave) により波動が励起される領域である。さらに高次モードである  $n > +1$ ,  $n < -1$  については、ここに図示していないが、それぞれ基本モードである  $n = +1, n = -1$  の分散関係曲線とよく似ており、特に変わった特徴はない。その成長率は基本モードと同程度であるが、高次ほど解の取りこぼし率が高く、不安定になる。

## 2.5.2 プラズマ・パラメータの変化

図 2.12 のような分散関係図を、物理パラメータを変えて数多く計算し、その虚数部を最大とする点の追跡を行えば、励起波動の各モードに対する成長率、周波数、波数がどのような特性を持つのか明らかとなる。ここで得た特性の計算結果は、後で、電子ビーム・プラズマ放電実験を考察する際の基礎となるもので、これについて次に述べよう。

### プラズマの電子密度変化

図 2.13 はプラズマの電子プラズマ周波数  $W_{pe}$  ( $= W_{pe1} = W_{pe2} \propto \sqrt{\text{プラズマ密度}}$ ) に対するモード  $n = 0, n = +1, n = -1$  の成長率を示したものである。この特性は、図 2.12 に於いて、電子プラズマ周波数を変化させ、 $W$  の虚数部の最大値を読みとって求



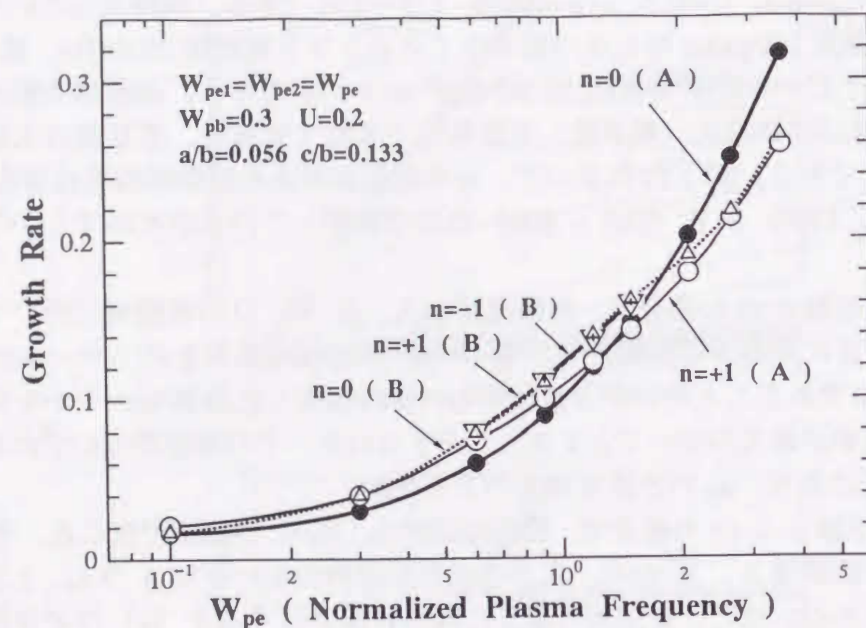


図 2.13: プラズマ電子密度対波動成長率 電子ビームの状態及びプラズマ半径を一定とした条件のもと、プラズマ電子密度によって、成長率は異なる。プラズマ電子密度が低いときは  $n = +1$  の A 領域のモード，中程度のときは  $n = 0, n = +1, n = -1$  のいずれも B 領域のモード，高いときは  $n = 0$  の A 領域のモードの成長率が大きくなる。

めている。パラメータはやはり標準の実験条件に合わせてあり，電子ビームについては密度  $W_{pb} = 0.3$ ，速度  $U = 0.2$ ，半径  $a/b = 0.056$  とし，プラズマ半径  $c/b = 0.133$  である。これによると励起波動の成長率は，プラズマ密度が低いときは，右回り波  $n = +1$  (A) が最も大きく，中程度では3つのモード  $n = 0, +1, -1$  (いずれも B) がほぼ等しく（ただし，プラズマ密度の変化に最も安定なのは，解の取りこぼし状況から判断して， $n = 0$  (B) である），その他のモードよりは大きくなる。そして，プラズマ密度が高いときは，軸対称波  $n = 0$  (A) が最も大きい。なお，モード  $n = 0, +1, -1$  (いずれも B) の成長率曲線が  $W = 2$  付近で不自然に曲がっているが，これは解の取りこぼしの極端に多いモードは無視し，成長率がそれより小さくとも取りこぼしの少ない安定なモードを取ったためである。計算精度を上げれば取りこぼしが減少して，この不自然さはなくなるが，それは安定な波動でなく，実験で観測されるとは思えない。

次にプラズマ電子密度  $W_{pe}$  を変化すると，励起波動の周波数  $W$  (ただし実数部) 及び波数  $K$  がどうなるのかを図 2.14 に示す。これは電子ビーム一定のもと，プラズマ密度の変化が励起波動の周波数，波長 (波数) に与える影響を見るものである。調べた点は図 2.13 に対応しており，成長率の求め方と同様に，それぞれの分散関係図に於ける虚数部の最大点から数値を読み取っている。プラズマ電子密度の増加と共に，周波数  $W$ ，波数  $K$  のいずれも増加する。励起波動が相互作用のない場合のプラズマと，電子ビームの分散関係曲線の交わり点で生じることを考えれば，これは容易に推察できる。すなわち，図 2.10 の

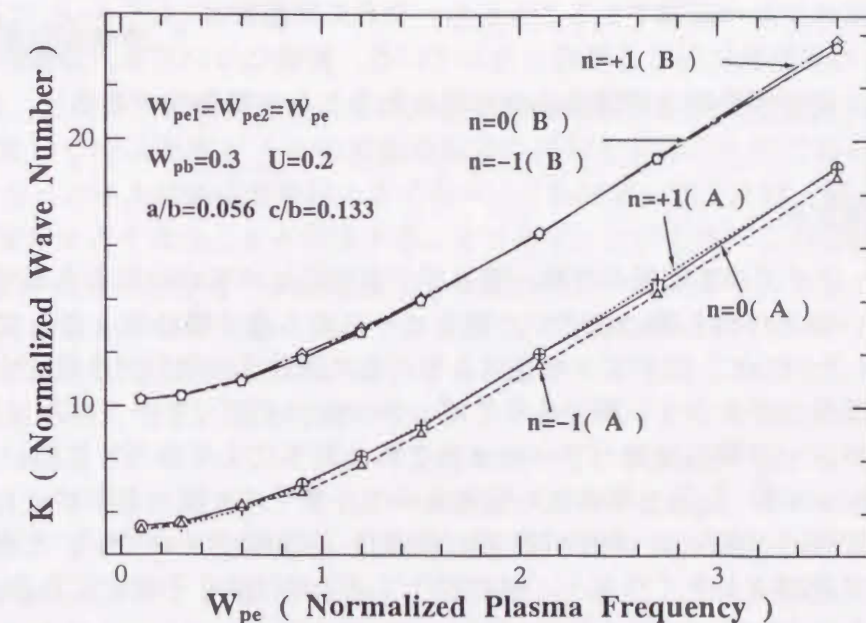
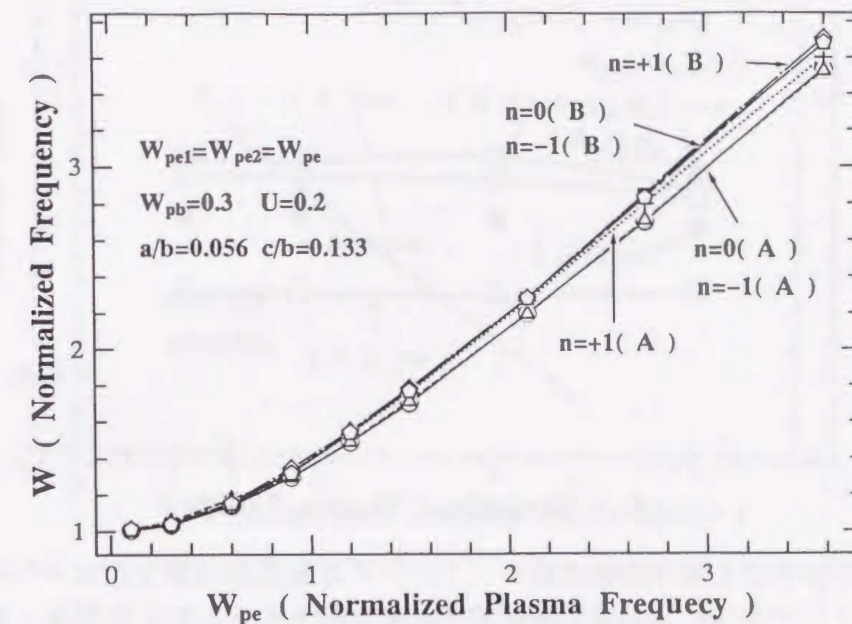


図 2.14: プラズマ電子密度対周波数  $W$  及び波数  $K$  電子ビームの状態及びプラズマ半径が一定のとき，プラズマ電子密度の増加と共に，成長率の大きい各励起モードの周波数，波数 (波長) はいずれも増加する。(上) 周波数  $W$  (下) 波数  $K$



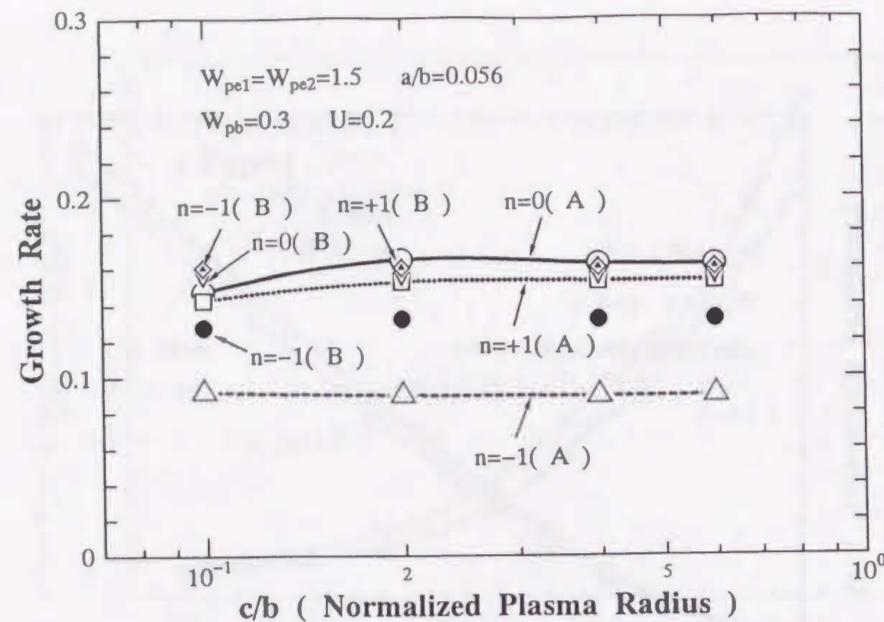


図 2.15: プラズマ半径  $c/b$  対波動成長率 プラズマ密度及び電子ビームの条件を一定としたとき、プラズマ半径による波動成長率の変化はほとんどない。ただし、プラズマ半径がある程度大きくなると、解の取りこぼし率が高くなり不安定さが増す。

領域  $a, b$  を通るプラズマの分散曲線はほぼ水平であり、電子ビームの分散曲線もほぼ電子ビーム速度の傾きを持つ直線であることから、交点の周波数は  $\sqrt{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2}$  に近いはずで、これが図 2.14 の周波数に対する特性となっている。波数についても、分散曲線が直線であることから、周波数特性と同様の傾向が得られることは明らかである。

### プラズマの半径変化

電子ビーム・プラズマ系に於いては、電子ビーム径に比べてかなり大きな半径を持つプラズマとも強い相互作用を持つはずで、電子ビームから遠く離れたところでも活発な放電が起きる。したがって、プラズマ半径により、その波動成長率がどう変化するかは興味がある。波動成長率が大きく、解の取りこぼしの少ない安定なモード（図 2.13 に対応するもので、プラズマ半径以外のパラメータはこれと同じにしてある）について、図 2.15 に、そのプラズマ半径 ( $c/b$  と規格化) 特性を示す。プラズマ径が電子ビーム径の数倍以上あっても、直感とは異なり、波動成長率にさほどの変化は見られない。ただし、プラズマ半径がある程度以上大きくなると、解の取りこぼし率は高く不安定になる。

### 2.5.3 電子ビーム・パラメータの変化

プラズマ状態を一定にして、電子ビームの速度  $U$  及び密度（電子ビームの電子プラズマ周波数  $W_{pb}$  で表せる）を変化させるとどのような励起波動の特性が得られるだろうか。実験に於いて、電子ビームの制御が容易にできるので、この特性は理論の一つの重要な検

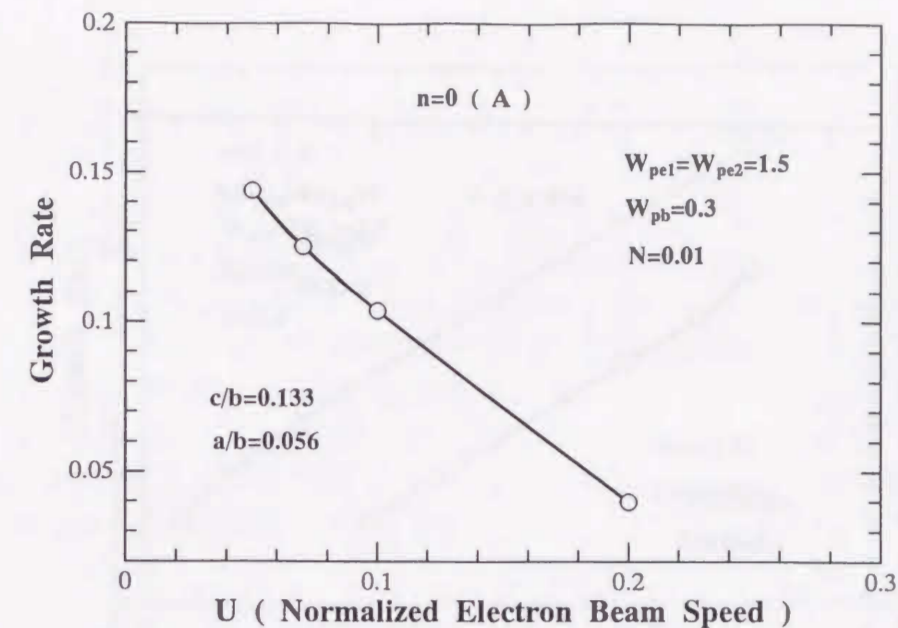


図 2.16: 電子ビーム速度対波動成長率 プラズマの条件を一定とし、電子ビーム速度  $U$  を大きくすると波動成長率は小さくなる計算結果が得られる。

証材料になる。

### 電子ビーム速度の変化

図 2.16 は、プラズマ密度が高いときに大きな波動成長率を持つ軸対称モード  $n=0(A)$  についての電子ビーム速度  $U$  とその波動成長率の関係を示したものである。電子ビーム速度  $U$  が大きくなると波動成長率は小さくなり、これは言い換えれば、電子ビーム・プラズマ相互作用が小さくなることを意味する。ところで、このとき、この励起モードの周波数  $W$  と波数  $K$  の方は一体どのように変化するのに興味あるところである。特に周波数については、周波数をかなり正確に測定できるので、信頼の高いデータの一つとなり得る。

この計算結果を図 2.17 に示そう。電子ビーム速度  $U$  が大きくなると、周波数  $W$  及び波数  $K$  は共に小さくなる。相互作用のないプラズマと電子ビームの分散関係式はそれぞれほぼ直線（図 2.10）であり、それらの交点に於いて、波動が励起する可能性を既に述べた。これに基づいて考えると、電子ビーム速度が大きくなれば、その分散関係式の傾きが大きくなり、プラズマの分散曲線（ほぼ直線だが小さな負の傾きを持つ）との交点は、周波数  $W$  が少し上がり、波数  $K$  が小さくなる方向に動く。この予想は、波数  $K$  についてはその通りになっているが、周波数  $W$  については全く逆で、複素計算をして初めてわかることである。



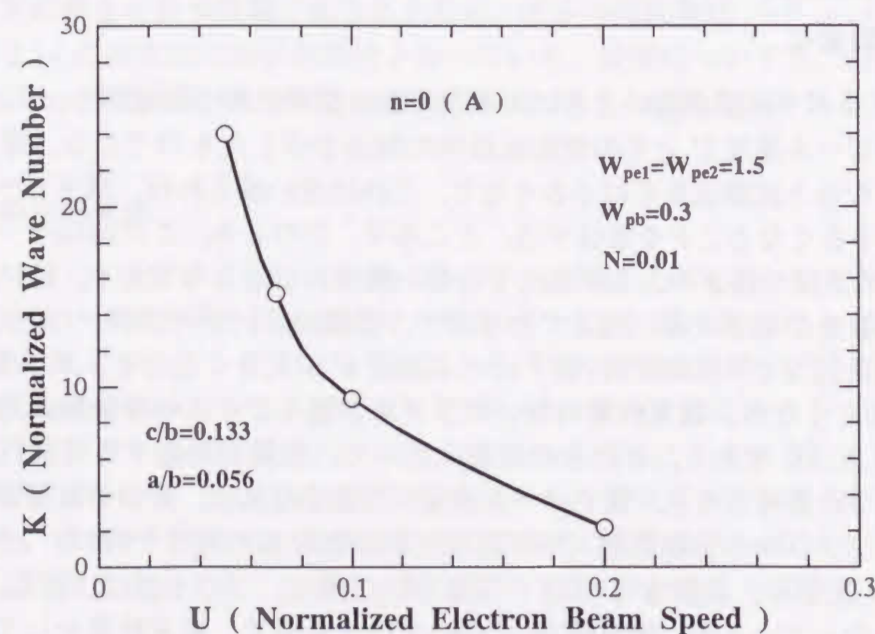
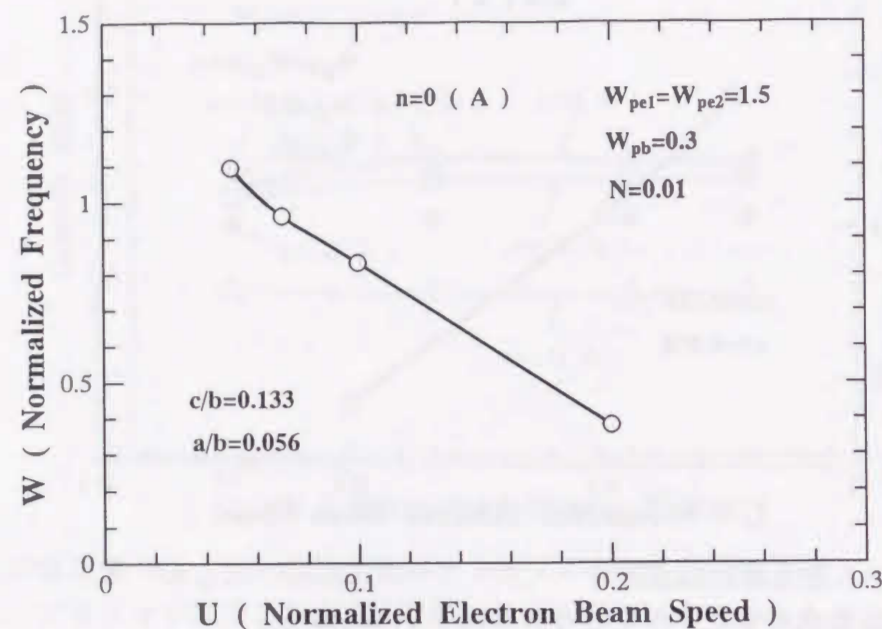


図 2.17: 電子ビーム速度対周波数  $W$  及び波数  $K$  の関係 プラズマの条件を一定とし、電子ビームの速度を大きくすると、周波数と波数は共に減少する。(上) 周波数  $W$  (下) 波数  $K$

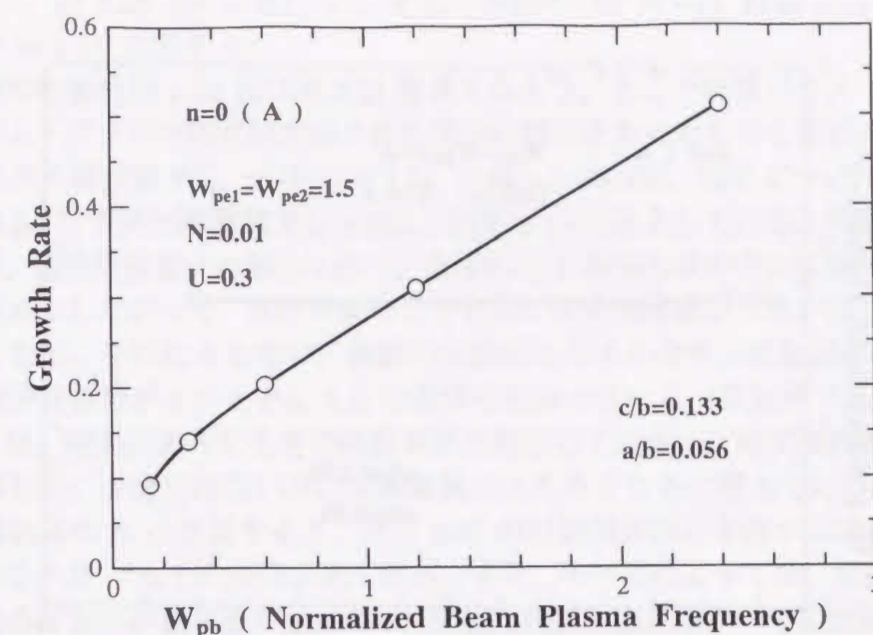


図 2.18: 電子ビーム密度対波動成長率 プラズマの条件を一定とし、電子ビーム密度 (電子ビームプラズマ周波数  $W_{pb}$  で表す) を増加すると波動成長率は大きくなる。

#### 電子ビーム密度変化

電子ビーム密度 (電子ビームのプラズマ周波数  $W_{pb}$  で表す) に、励起波動の成長率、周波数  $W$ 、波数  $K$  はどう変化するであろうか。波動成長率については図 2.18 に、周波数及び波数については図 2.19 に示す。ここで、電子ビーム密度以外のパラメータは一定とし、波動モードには、先に述べた電子ビームの速度変化のときと同様に、軸対称モード  $n=0(A)$  としよう。励起波動の成長率、波数  $K$  は、プラズマの電子密度を変化させたときの特性によく似ており、電子ビーム密度の増加、すなわち、電子プラズマ周波数  $W_{pb}$  の増加と共に、大きくなる。しかし、周波数  $W$  の方は余り変化しない。この結果は相互作用のない分散関係式から当然予想されることである。

#### 2.5.4 衝突周波数の効果

プラズマに粒子間衝突や温度など、何らかの損失があるとして、衝突周波数が 0 でないときは、T-G モードの分散関係図にどのような影響が現れるであろうか。単純に考えると、周波数  $W$  の虚数部の大きさが、損失のない場合に比べて小さくなり、その成長率は減少すると予想される。このことは大まかには正しいが、虚数部の分散曲線の様子は想像することが困難であるし、実際に計算を行うと、いくつかの興味ある事実も見いだされる。衝突周波数が小さいとき及び大きいときについて、その計算結果を励起モードが軸対称波 ( $n=0$ ) は図 2.20 ( $N=0.01$ )、図 2.21 ( $N=0.1$ ) に、右回り波 ( $n=+1$ ) は図 2.22



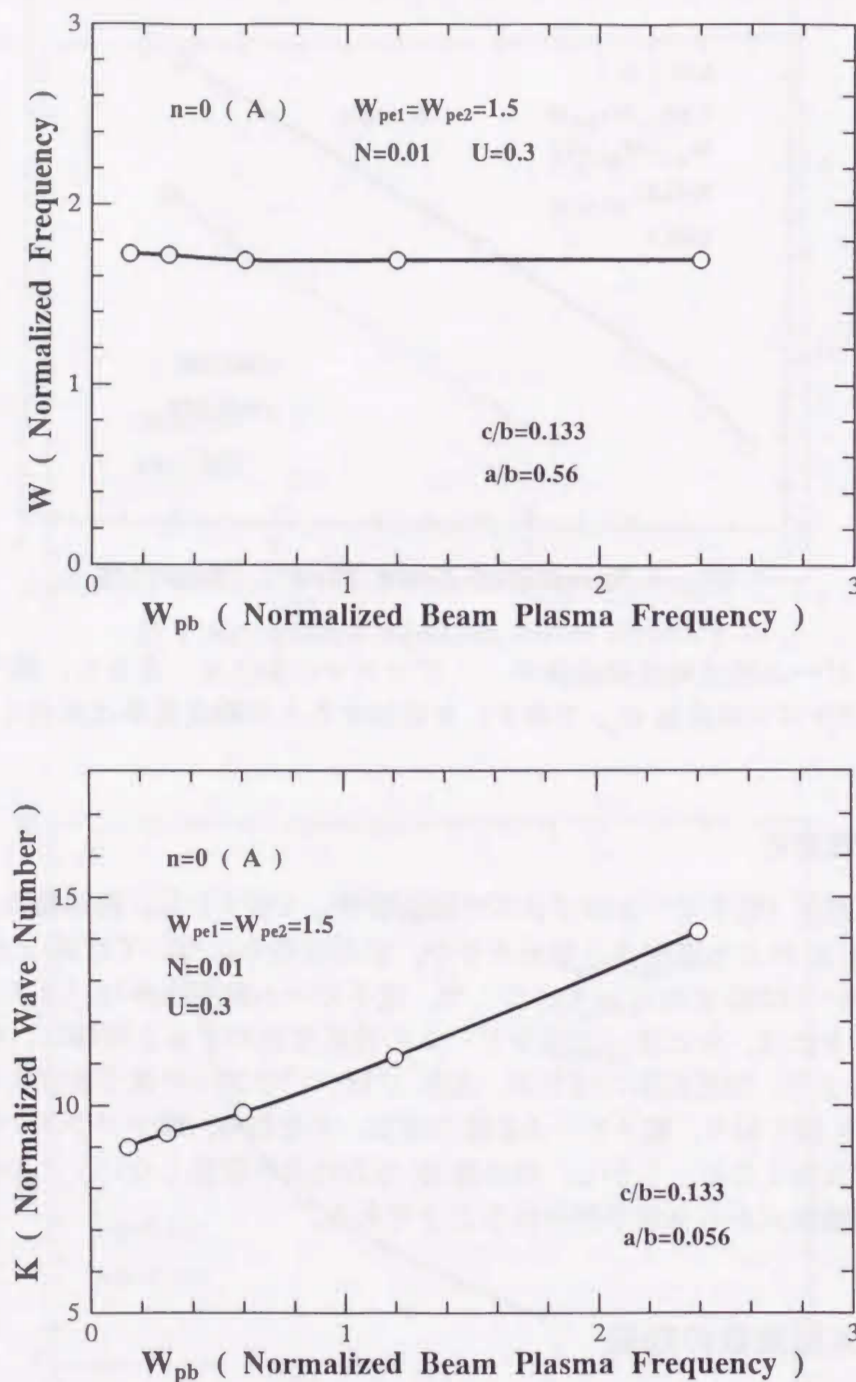


図 2.19: 電子ビーム密度対周波数  $W$  及び波数  $K$  の関係 プラズマの条件を一定として、電子ビーム密度（電子ビームプラズマ周波数  $W_{pb}$  で表す）を増加すると、周波数  $W$  は余り変わらず、波数  $K$  は大きくなる。（上）周波数  $W$  （下）波数  $K$

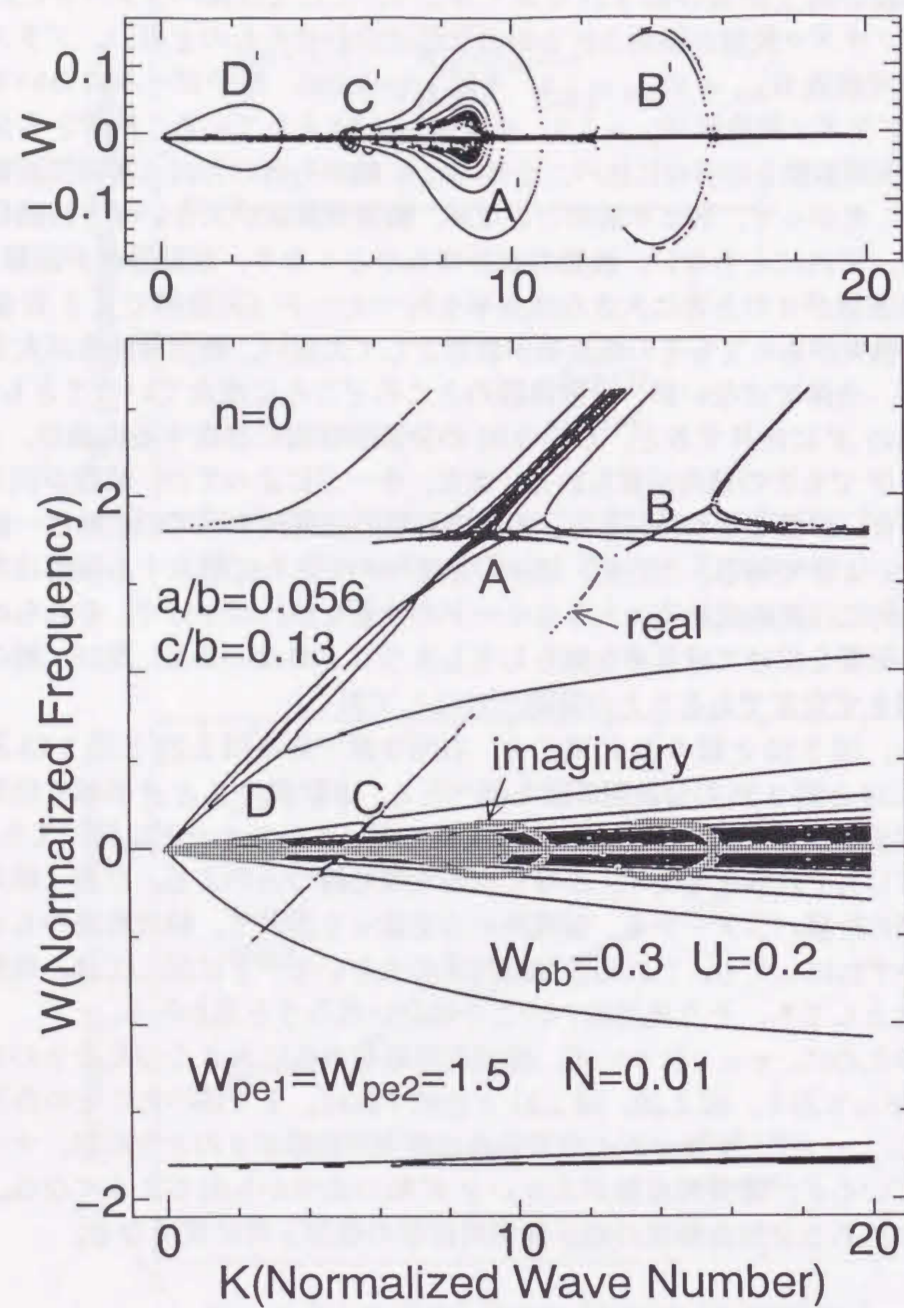
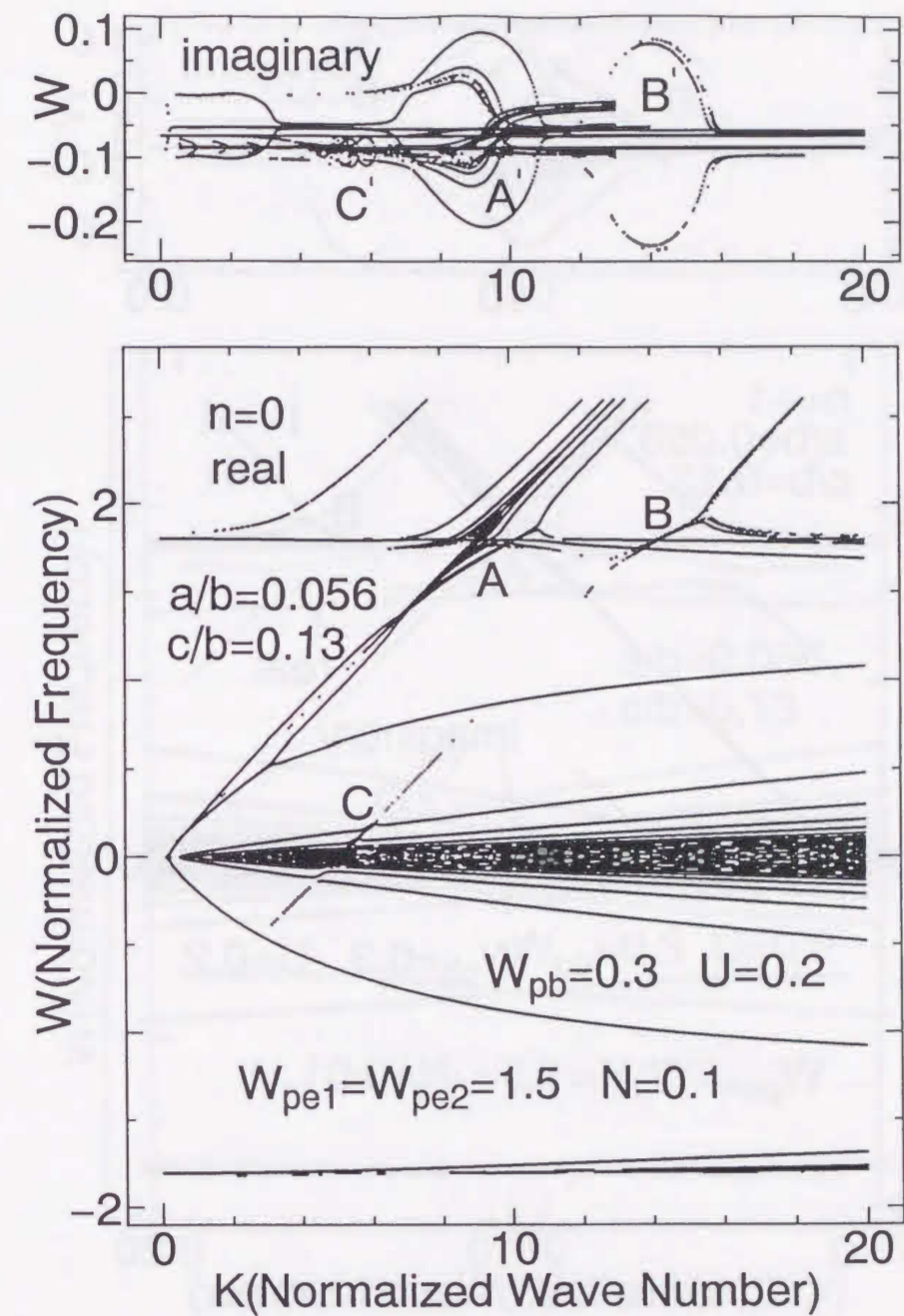
( $N = 0.01$ )，図 2.23 ( $N = 0.1$ ) に，そして左回り ( $n = -1$ ) は図 2.24 ( $N = 0.01$ )，図 2.25 ( $N = 0.1$ ) に示そう。

まず，軸対称波の図 2.20 及び図 2.21 を見てみよう。ここで計算パラメータには，実験で電子ビーム・プラズマ放電が開始される前の状態に合わせたものを用い，プラズマについてはプラズマ周波数  $W_{pe1} = W_{pe2} = 1.5$ ，半径  $a/c = 0.056$ ，電子ビームについてはその速度  $U = 0.2$ ，プラズマ周波数  $W_{pb} = 0.3$ ，半径  $b/c = 0.13$  としている。両者とも分散関係の虚数部が，衝突周波数 0 の場合に比べ，全体的に  $K$  軸から負の方向に衝突周波数分だけ移動している。したがって，当たり前のことだが，衝突周波数が大きいほど波動伝搬の減衰は大きくなる。それにともない，波動の成長率も小さくなり，波動励起が困難となる。しかし，衝突周波数が 0 のときに大きな成長率を持つモード（実数部で  $A$  と  $B$  領域で励起される）は，損失があってもその成長率が依然として大きい。衝突周波数が大きいと解の取りこぼしが，全体ではないが，分散曲線のところどころに増えていることもわかる。例えば，虚数部の  $A'$  に注目すると， $N = 0.01$  の分散関係図に存在する曲線が， $N = 0.1$  では消えている。 $B'$  でもその傾向が見られる。また，モードによっては，波数が同じであっても，減衰の度合いが異なるものがあり，衝突周波数の効果はすべての波動に様に働いているのではないようである。この他，細かい点についてさらに追求する価値はありそうだが，本研究目的には波動成長率の大きなモードの性質を知れば十分で，それらのモードが衝突周波数の影響を受けて成長率を減らしてしまうことがないこと，及び，解の取りこぼしがさほど増えず安定であることの確認だけにしておく。

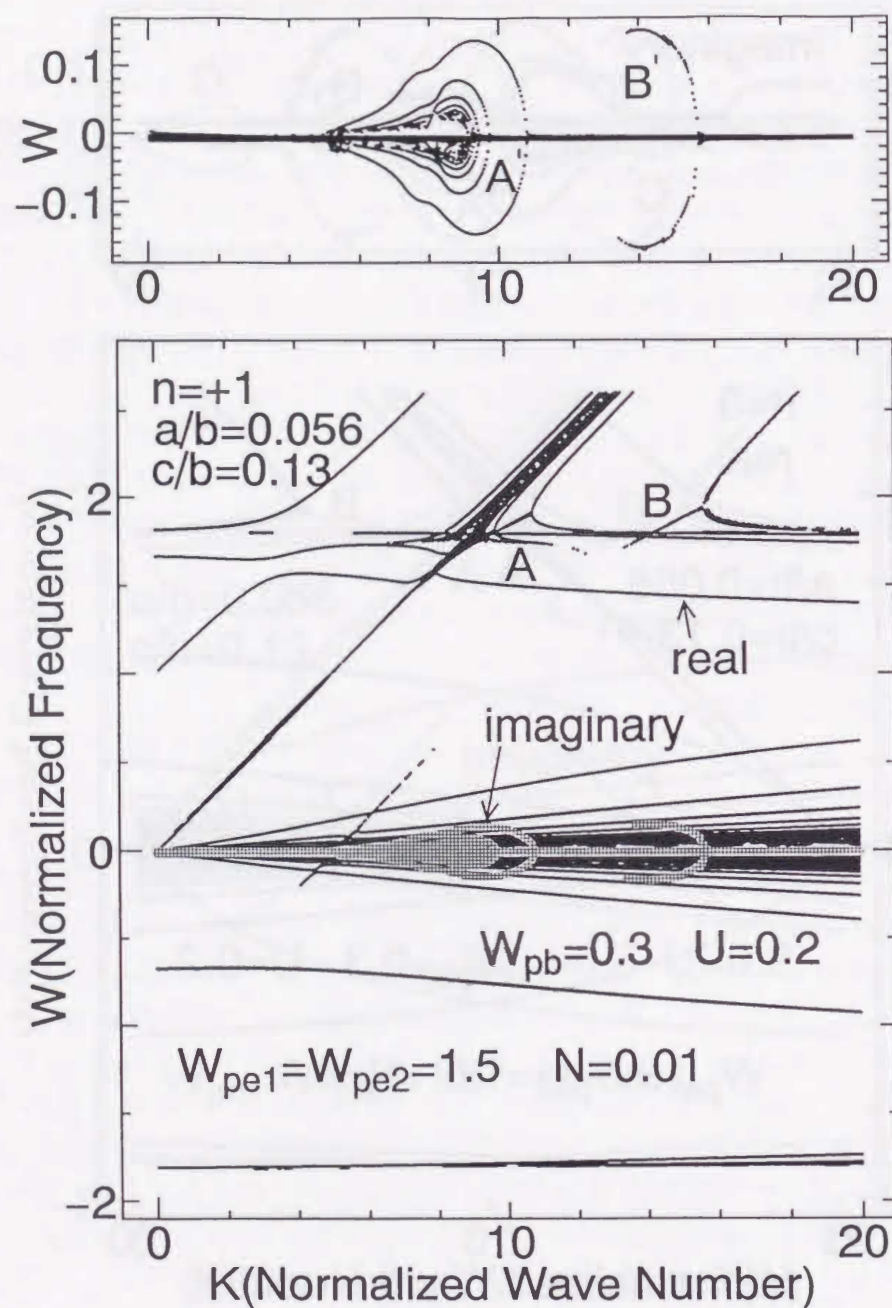
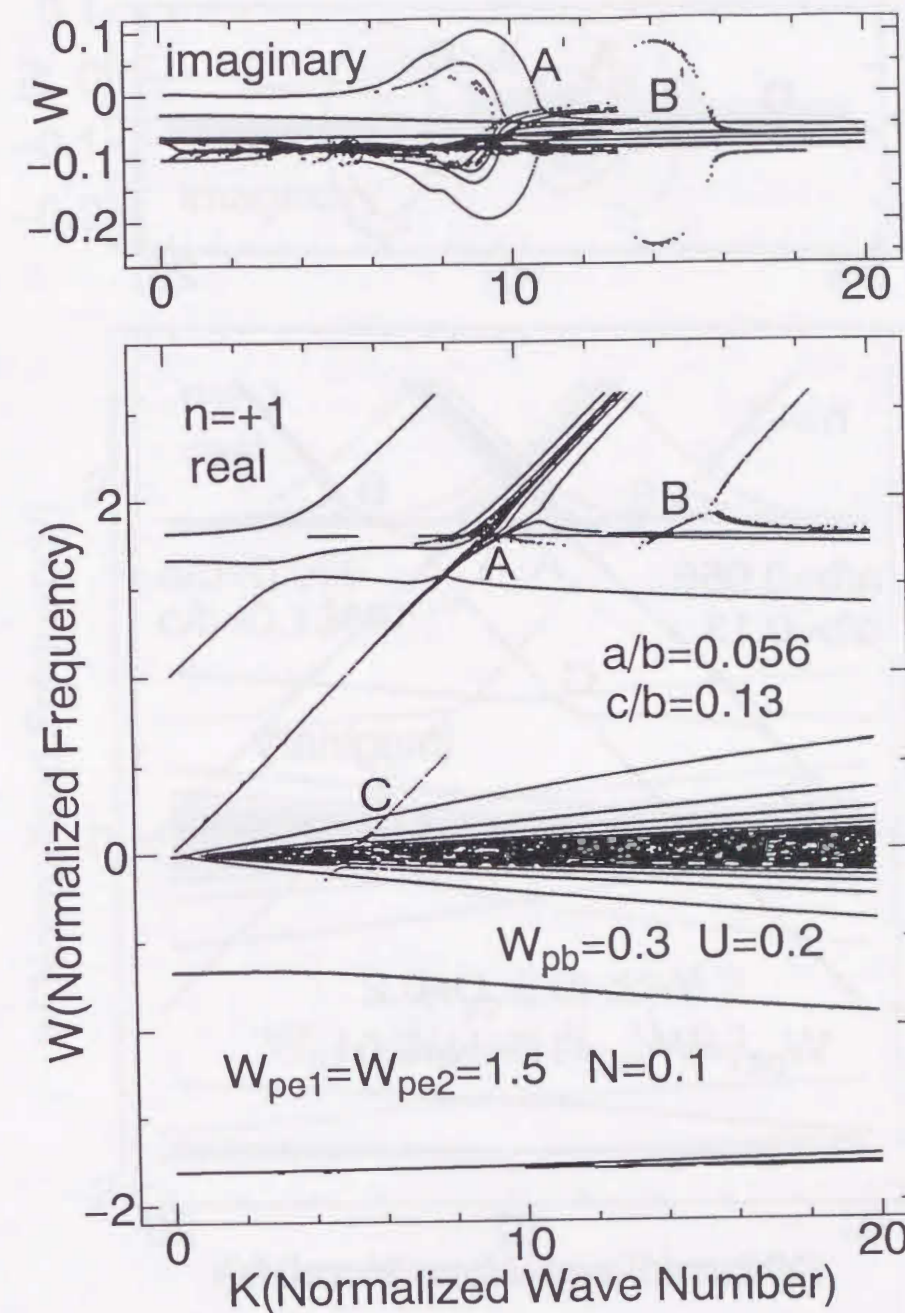
この観点から，図 2.20 と図 2.21 に同じく，右回り波である図 2.22 と図 2.23 及び左回り波である図 2.24 と図 2.25 の分散関係図を調べると，実数部の  $A$  と  $B$  領域に励起される波動は，衝突周波数が多少大きくとも，その成長率がいずれのモードに於いても大きい。また，取りこぼしもそれほど増えず，かなり安定な解を持つといえる。なお，軸対称波以外の分散関係図の計算パラメータも，偏波決める定数  $n$  を除いて，軸対称波のものと同じにしてある。いずれにしても，これら波動成長率の大きいモードに関しては，無損失プラズマで議論したとしても，そう見当違いのことはないだろうと思われる。

ここで参考のために， $n = 0$  について，衝突周波数をさらに大きくしたときの分散関係図を図 2.26 に示しておく。図 2.20，図 2.21 と比較すれば，上で述べたことの外に二つのことが目に付く。一つは， $K$  軸付近の分散曲線は衝突周波数が 0 のときには，すべて座標原点から出発しているが，衝突周波数が大きいと  $K$  軸の途中から出るようになる。もう一つは， $A$  の上部にある分散曲線群の幅が衝突周波数の増加と共に狭くなる。

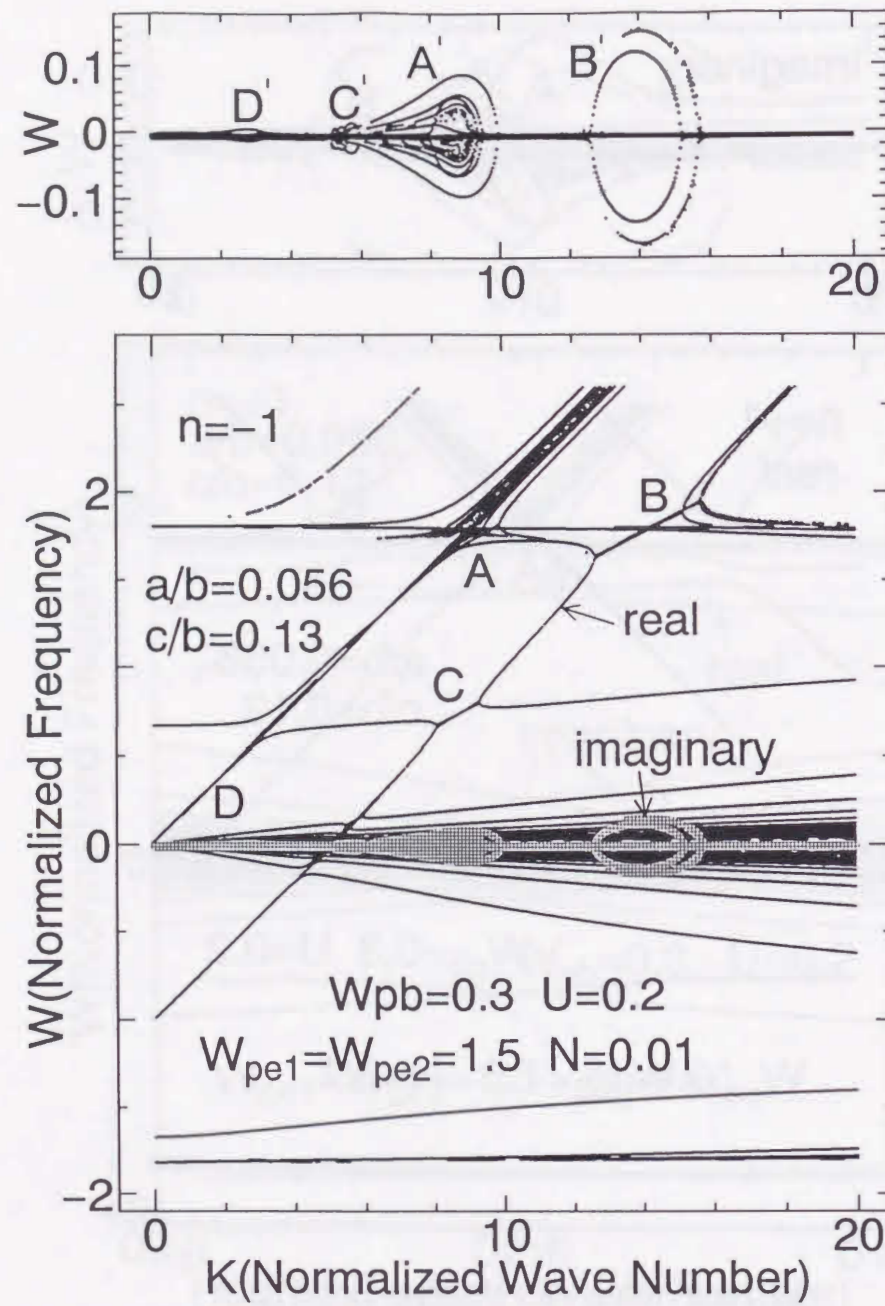
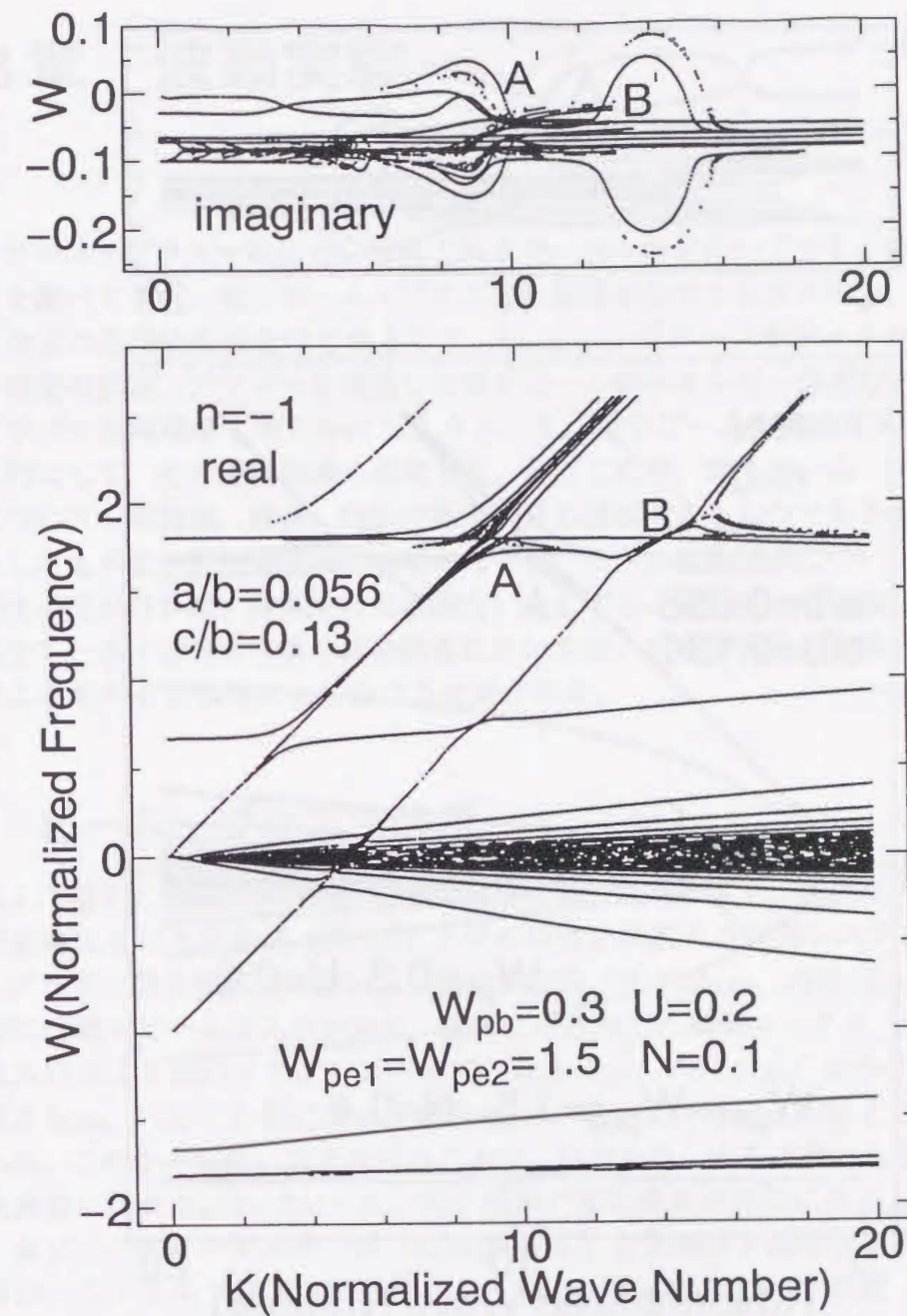


図 2.20: 軸対称波 ( $n = 0$ ) で衝突周波数が小さい ( $N = 0.01$ ) ときの分散曲線図 2.21: 軸対称波 ( $n = 0$ ) で衝突周波数が大きい ( $N = 0.1$ ) ときの分散曲線



図 2.22: 右回り波 ( $n = +1$ ) で衝突周波数が小さい ( $N = 0.01$ ) ときの分散曲線図 2.23: 右回り波 ( $n = +1$ ) で衝突周波数が大きい ( $N = 0.1$ ) ときの分散曲線



図 2.24: 左回り波 ( $n = -1$ ) で衝突周波数が小さい ( $N = 0.01$ ) ときの分散曲線図 2.25: 左回り波 ( $n = -1$ ) で衝突周波数が大きい ( $N = 0.1$ ) ときの分散曲線



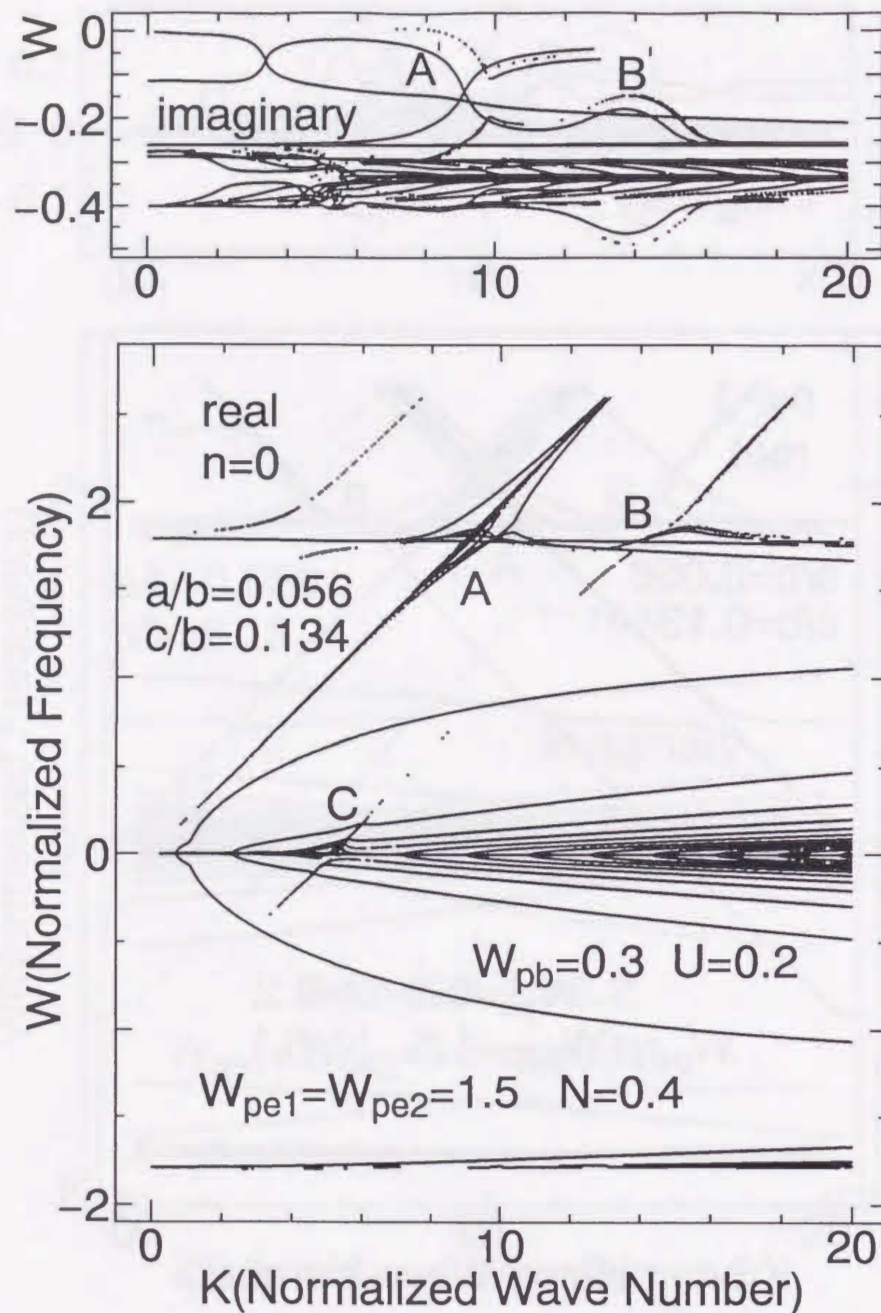


図 2.26: 衝突周波数がさらに大きい ( $N = 0.4$ ) ときの分散関係図 衝突周波数が大きくなると図 2.20, 図 2.21 に比べて,  $K$  軸付近の分散曲線は座標原点でなく,  $K$  軸の途中から出発するようになる。また,  $A$  の上部にある分散曲線群の幅が狭まってくる。

## 第3章 波動実験

電子ビーム・プラズマ系についてはこれまで, 我々のグループでも, 様々な角度からその性質を調べてきた。電子ビーム・プラズマ放電開始に対するガス圧力, 磁界, 電子ビーム速度などの基礎的条件をはじめとして, Langmuir プロブやマイクロ波によるプラズマ電子密度の測定, プラズマを通過した電子ビームのエネルギー分布などから, 電子ビーム・プラズマ放電機構を明らかにしようとした。電子ビームを連続注入するだけでなく, パルスのようにして, その過渡現象も研究した。そうした中, 電子ビーム・プラズマ系の励起波動についての周波数, 波長, 位相の測定が最も信頼できるものであると考え, 今回改めてそうしたものを, 特に重点的に追求してきた。ただ, 波動振幅については, 実験装置の精度が十分でなければ, 時間的には問題ないとしても, 場所的には正確な数値は得られない。電子ビーム・プラズマ系の波動調査に於いては, 本来の現象と実験装置が完全でないことによるものとを慎重により分ける必要がある。

### 3.1 ビーム・プラズマ装置

図 3.1 に電子ビーム・プラズマ放電の実験装置の概略を示す。装置は大きく分けて, プラズマを発生させる真空部 (図 3.2) とその特性を測定する計測システム (図 3.3) から成る。プラズマ発生領域はステンレス製円筒容器 (長さ 45cm, 内径 16cm) で, 容器の一方の壁には電子ビーム注入口があり, 他方には水冷した銅製コレクタ (直径 14cm) がある。注入口はより細いステンレスパイプ (長さ 8cm, 内径 5cm) に小さな穴あき銅製円柱 (長さ 5cm, 穴は中心軸に沿って直径 8mm, 電子ビームはこの経となる) を詰めたものである。この小さな長い穴を設けることで, 圧力を高くする必要のあるプラズマ発生領域と高真空に保たなければならない電子銃部の差動排気が可能になる。電子銃はピアス型で, カソードはタングステン線 (直径 0.5mm) を数回ほど渦巻き状にした直熱形ヒータを用い, ウェネルト電極と同電位にしてある。電子銃のヒータ電流 (15A まで) はカソード電流 (50mA まで) を一定にするために, ダイオードとキャパシタから成る全波整流回路により供給している。アノードは円筒容器と同じアース電位にとりてあり, カソードは電子ビーム加速電圧分 (2kV 程度) だけ負に電位を低くしてある。電子銃から出た電子ビームは, フォーカスコイルとオリフィスコイルの働きにより細く絞られた後, 穴あき銅製円柱を通過してプラズマ発生領域に入り, 最後に銅製コレクタに到達する。電子ビーム (20mA 程度まで) は, 銅製コレクタで回収され, コレクタ電流計測用の抵抗 (50  $\Omega$ ) を通じてアースに返される。そのため, 銅製コレクタはプラズマ発生領域壁とは絶縁してある。プラズマ発生領域には, 気体圧力 (1mTorr まで) を変化させるために気体 (アル



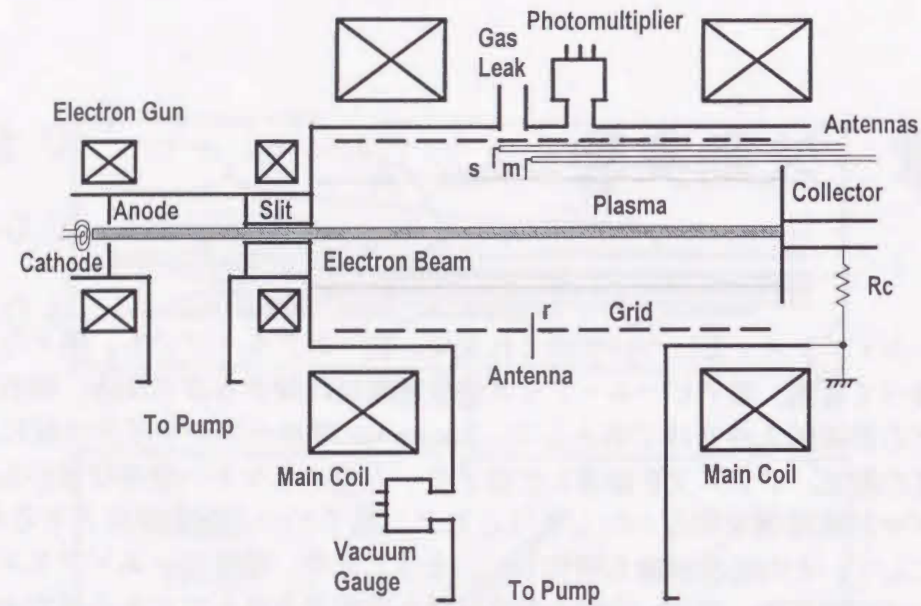


図 3.1: 電子ビーム・プラズマ実験装置概略図 左側の電子銃により中央のプラズマ発生真空容器に電子ビームを打ち込み、右側のコレクタでこれを回収する。真空容器と電子銃部は差動排気されている。電子ビーム・プラズマ系はこの電子ビームとそれによる衝突電離プラズマで構成される。

ゴンガス) 導入用のリークバルブと排気用拡散ポンプが取り付けられている。拡散ポンプへのパイプ (内径 16cm) には、プラズマ発生領域の圧力を測定用する真空ゲージがある。なお、このパイプのために、プラズマ発生領域の電気的境界条件が円筒形からはずれて複雑にならないよう、プラズマ発生領域の円筒壁は銅製金網を密着させて覆ってある。このほか、目視及び光電子増倍管によるプラズマの観測のためのビーイングポートがステンレス円筒の中心部に設けられている。プラズマ発生領域には、外部から 2 つの主コイルにより磁界 (100 Gauss) をステンレス円筒軸方向に加えている。磁界は図 3.2 に示すような強度分布のミラー磁界 (ミラー比 1.4) である。波動測定のためには、ステンレス円筒の軸方向に可動である 2 本のアンテナ (タングステンプローブ, 長さ 5cm, 直径 0.2mm) とステンレス円筒の半径方向に可動である 1 本のアンテナ (タングステンプローブ) がある。これらのアンテナはステンレス円筒の半径方向に向いており、半径方向の電界成分の測定ができる。なお、軸方向移動可能な 2 本のアンテナの方向は互いに角度 ( $48^\circ$ ) があるので、波動偏波の回転状態を調べることができる。また、アンテナの位置は、電子ビーム入射口からの距離で表すことにする。アンテナから取り入れた波動信号は同軸ケーブル (特性インピーダンス  $50\Omega$ ) により外部の計測装置まで送られる。特に注意しなければならないのは、軸方向可動の 2 本のアンテナは高周波 (VHF 帯以上) に於ける波動信号の位相差を測定する必要があり、計測装置までのケーブル長は同じにしてある。この確認は、VHF 信号を半径方向に可動なアンテナから発射し、2 本のアンテナの位置を同じにし、それぞれの受信信号に位相差がないことで行っている。確認してまた、2 本のアン

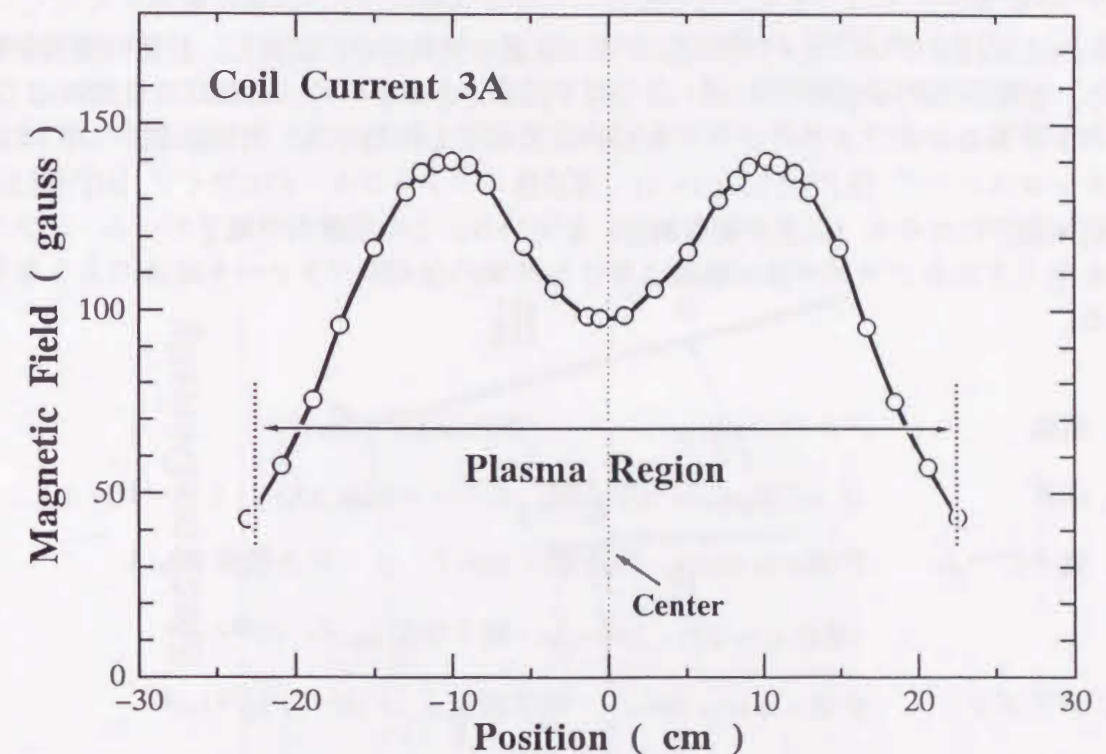
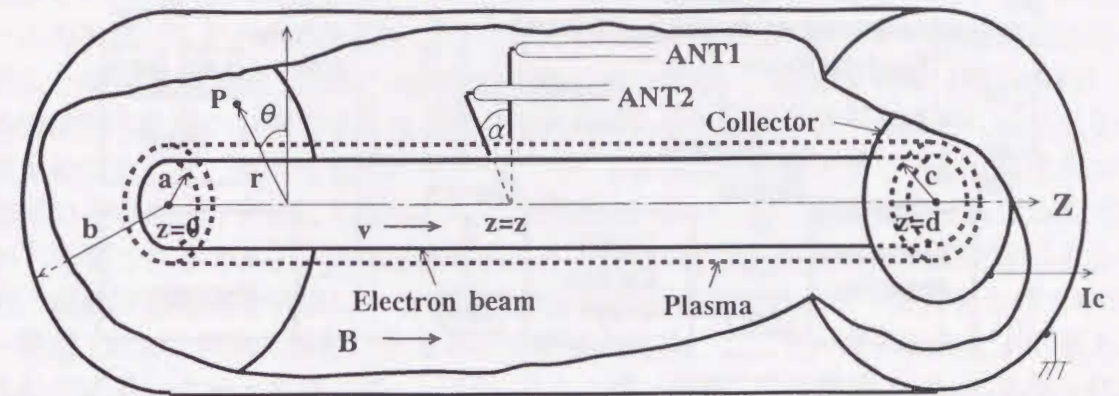


図 3.2: 上はプラズマ発生真空容器で、ここで電子ビーム・プラズマ系を生じさせる。波動測定は可動である二本のアンテナで主に行う。下は容器中心軸上の背景磁界強度であるが、ミラー磁界になっている。



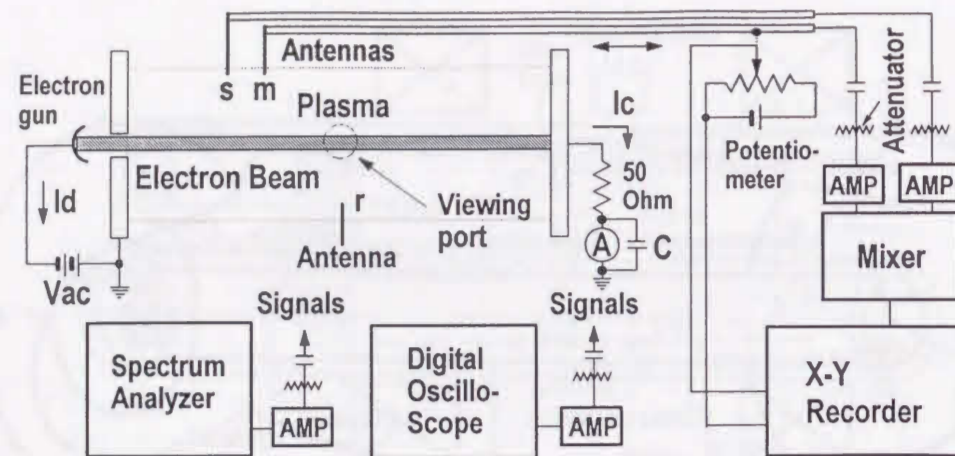


図 3.3: 波動測定装置 アンテナ位置は電気信号に変えてレコーダ入力となる。二本のアンテナ信号は増幅器、ミキサーを用いてその位相差が検出される。この他、オシロスコープ (2BS/s), 周波数スペクトラムアナライザ (2GHz) も利用するが、信号線長による位相遅れや 50Ω 系とすることなど注意が必要である。

テナの内 1 本はポテンショメータによりその位置は電気信号に変換し、計測の便宜を図っている。波動信号の直流分をカットして取り出すことが多いが、それには目的に応じて、キャパシタあるいはフェライトコアを用いた変成器を使用する。計測装置としては主としてオシロスコープ (HP54520 2GS/s), 周波数スペクトラム・アナライザ (HP8555A), 及び位相測定にミキサ (二重平衡変調器) を用いる。この実験系で電子ビーム・プラズマ放電を生じさせるプラズマ発生領域に於ける標準的な実験パラメータは次のようなものである。

- 気体 アルゴン (Ar), 圧力  $\sim 10^{-4} \text{ Torr}$
- 磁界  $B = 100 \text{ gauss}$  (中心部, 主コイル電流 3A), ミラー比 1.4
- 電子ビーム 半径  $a = 4 \text{ mm}$ , 加速電圧 1800V, コレクタ電流 20mA  
(速度  $v = 2.5 \times 10^7 \text{ m/s}$ , 電子密度  $n_b \sim 10^{14} / \text{m}^3$ )
- プラズマ 半径  $c = 0 \sim 8 \text{ cm}$ , 電子密度  $n_e = 10^{14} \sim 10^{15} / \text{m}^3$
- 真空容器 半径  $b = 8 \text{ cm}$ , 長さ  $d = 40 \text{ cm}$

### 3.2 実験結果

以下に述べる電子ビーム・プラズマ系の実験結果については、特に断らない限り、前章で述べた標準的な実験パラメータを用いている。

#### 3.2.1 周波数スペクトル

電子ビーム・プラズマ系に於いて背景ガスの圧力を増加していくと、電子ビームと電子ビームの衝突により作られた薄いプラズマとの相互作用が生じる。このとき相互作用の程度により弱い電離 (第一段階), 中位の電離 (第二段階), 強力な電離 (第三段階) と 3 つの特徴的な状態に分類できる。電離の程度は、放電光強度が不連続的にはっきりとした変化をするので、簡単に見分けられる。これら状態は周波数スペクトルの変化やコレクタ電流の不連続的な変化にも現れるので、各段階に於いては、電離機構が異なるのではないかと予想される。まず、この分類を図 3.4 により示そう。横軸は電離真空計によるガス圧力、縦軸は電離度を目視による放電光強度の度合いである。ガス圧力を上げていくと、第一段階 I の a から第二段階である b に突然変化する。ここで、ガス圧力を下げると、小さなヒステリシスをともなって、b' から a' へと第一段階 I に突然戻る。b よりさらにガス圧力を上げれば、c に於いて第二段階 II から第三段階 III である d へと突然変化する。ここでガス圧力を下げると、第二段階 II を経ずに、直接 e から第一段階 I である f へと突然変化する。このときのヒステリシスはかなり大きいものである。具体的には、電子ビーム・プラズマ放電が開始し d の状態になると、放電停止にするには圧力を数分の一にしなければならぬ。これに比べ、b から a' へはガス圧力を数% 下げるだけでよい。したがって、ヒステリシスの大きさから非線形性を考えると、第二段階までは線形理論からそれほどかけ離れてしまうことはないが、第三段階は極めて強い非線形であると想像できる。

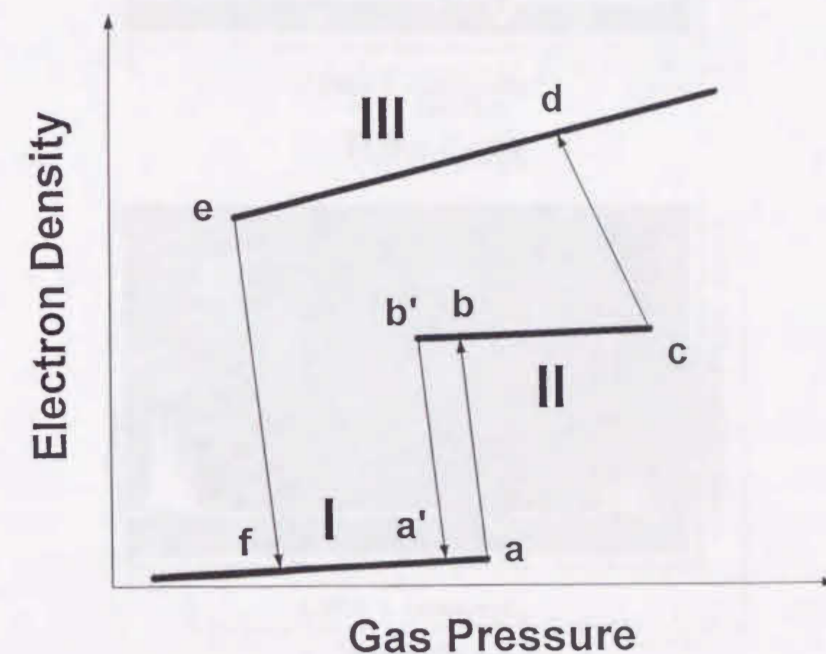
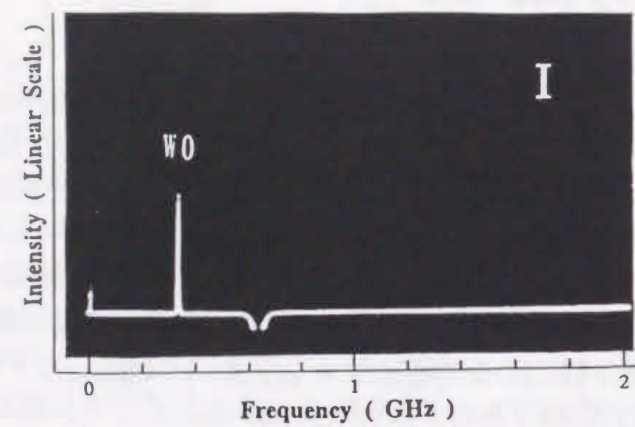
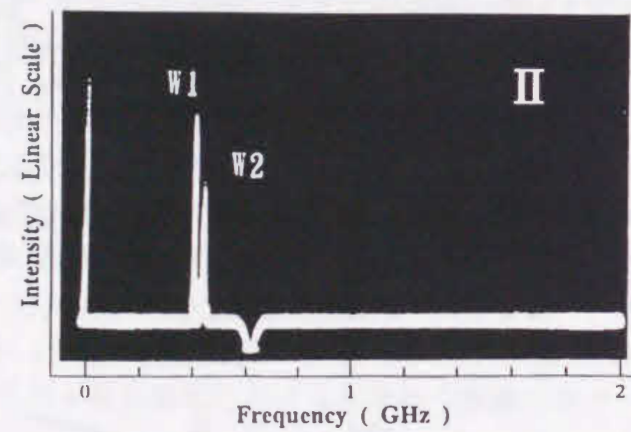


図 3.4: 電子ビーム・プラズマ系の三段階

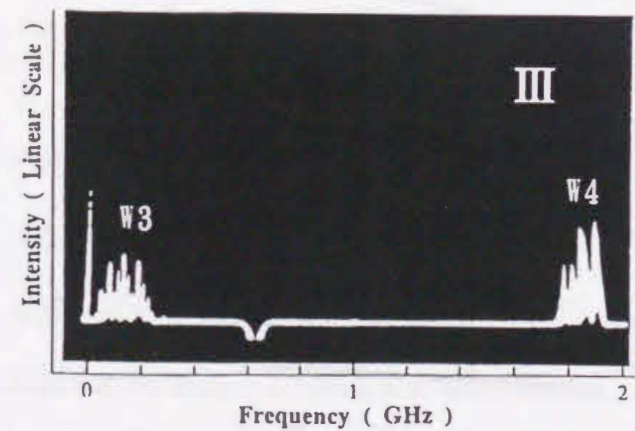




(a) 第一段階

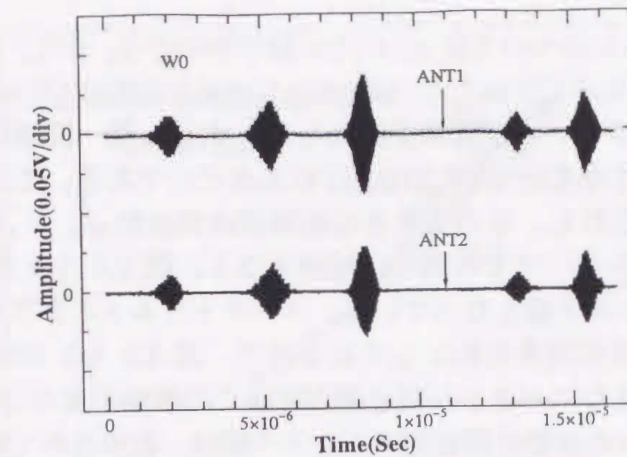


(b) 第二段階

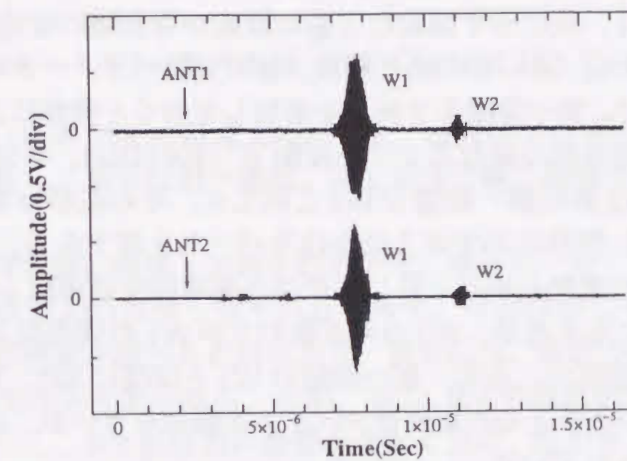


(c) 第三段階

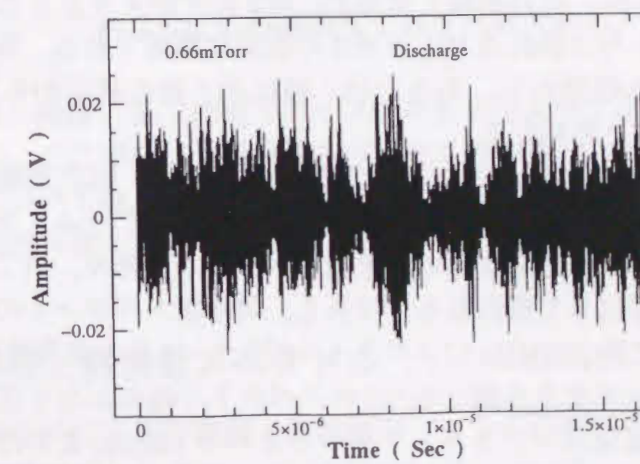
図 3.5: 周波数スペクトル 電子ビーム・プラズマ系の各段階に於いて特徴的なものが現れる。



(a) 第一段階



(b) 第二段階



(c) 第三段階

図 3.6: 励起波動の時間的波形 電子ビーム・プラズマ系の各段階によって特徴的な波形を示す。これらは図 3.5 のものと対応している。



次に、周波数スペクトルについて図 3.5 にその様子を示そう。また、それに対応する波動の時間的波形を図 3.6 にも示しておこう。図 3.5 (a) は圧力が低い（およそ  $2 \sim 3 \times 10^{-4} \text{ Torr}$  程度以下、他の実験パラメータは標準条件のものとする）第一段階のときのもので、周波数スペクトル幅の小さな波動 W0 (350 MHz) があるだけである。この周波数は圧力及び磁界強度の増加と共に上昇し、その大きさは高域混成周波数  $\omega_{he} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}$  付近にある。この波動をオシロスコープで時間的に観測すると、図 3.6 (a) に示すように連続波ではなく、間欠的なパースト波となっている。スペクトラム・アナライザはその周波数精度を確保するために、走引速度を低くしてあるので、図 3.5 (a) に示されている周波数スペクトルは、より小さなスペクトル幅を持つ数多くの波動が重なって表示されている。パースト波の一つひとつの波動の周波数スペクトル幅は、表示されているものより 1 桁以下となっており、パースト波の個々の周波数に変動が周波数スペクトル幅を見かけ上大きくしている。しかし、周波数変動はあるが 1 種類の波動モードであることは、周波数スペクトルの観察だけでなく、後に示す偏波など他の性質からも疑いないと思われる。

図 3.5 (b) は圧力が中位（ $3 \sim 6 \times 10^{-4}$  程度、他の実験パラメータは標準条件）である第二段階のときのもので、第一段階より圧力を増加してゆくと突然にこの周波数スペクトルが現れる。その特徴は周波数の異なる 2 つの波動 W1 (400 MHz), W2 (425 MHz) が存在することである。W1, W2 共に第一段階の W0 と同じく、その波形はオシロスコープの観測によれば、図 3.6 (b) 突然に示すようにやはりパースト波である。W1, W2 の周波数は、圧力及び磁界強度の増加と共に上昇し、やはり高域混成周波数  $\omega_{he}$  付近に存在する。そして実験パラメータにもよるが、W2 の周波数の方が W1 の周波数より、W1, W2 自体の周波数の数  $\sim 10\%$  程度高い。なお、第一段階の W0 と同様に W1, W2 の周波数スペクトル幅は、パースト波一つひとつの周波数スペクトル幅は小さいが、周波数変動のために広がってそれぞれ表示されている。

周波数の圧力依存性について、もう少し注意するなら、圧力が低いときには W1 の方が W2 より目立って観測され、圧力が高くなると、W2 の方がより目立って観測される。このことは周波数スペクトルに現れる W1 と W2 の重要な特徴である。実験パラメータを変化した周波数スペクトル観測から、あるいは、後に示す他の測定からも、明らかに W1, W2 は 2 種類の別の波動と思われる。

図 3.5 (c) は圧力が高い（およそ  $6 \times 10^{-4} \text{ Torr}$  程度以上、他の実験パラメータは標準条件）第三段階の周波数スペクトルである。これが通常電子ビーム・プラズマ放電と呼ばれている完全電離に近い強い放電状態の周波数スペクトルであり、第二段階から圧力を高めてゆくと状態が突然変化して現れるものである。周波数スペクトルの特徴は、低周波側に W3 (150 MHz を中心に約 200 MHz のスペクトル幅をもつ) 及び高周波側に W4 (1850 MHz を中心に約 200 MHz のスペクトル幅をもつ) のスペクトル幅のかなり広い 2 つの波動が存在することである。周波数スペクトラム・アナライザで 10 GHz までの周波数範囲を調べたが、この 2 つの波動以外の波動は存在しない。なお W3, W4 それぞれのスペクトルには細かいピークが見られる。面白いのは、図 3.5 (c) の第三段階の状態に於いて圧力を下げたときに、W3 には櫛状のきわめて鋭いスペクトルが多数観測される。これは、真空容器の軸方向に垂直な 2 つの壁による境界条件が共振器となり、本来はスペクトルならかな波動が特定の周波数の高調波を強めていると考えられる現象であろう。その周波数ス

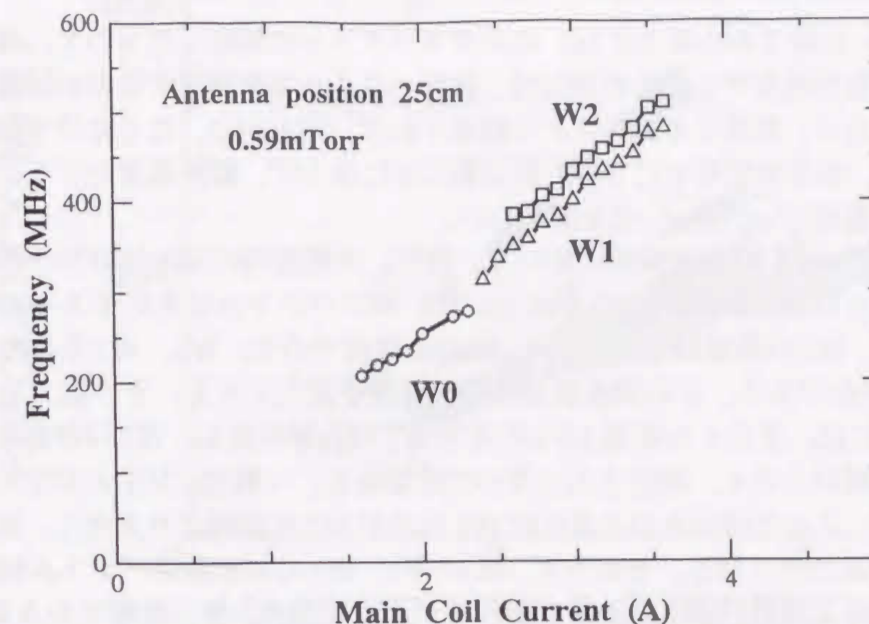


図 3.7: 磁界強度（磁界コイル電流 3 A のとき、磁界はプラズマ発生部中央で、およそ 100 gauss）対周波数 W0 は第一段階、W1, W2 は第二段階で励起される波動である。

ペクトルは非線形性が強い領域と推察されるので、電子ビーム・プラズマ放電開始時を主たる対象とした本研究からは少しはずれると考え、今回は詳しく追求をしていない。ただ、放電後の非線形現象を調べる必要はあり、測定には、最近の超高周波デジタル・オシロスコープの利用が不可欠となる。なお、W3, W4 の周波数は共に磁界強度に余り影響を受けない。しかし、W4 は圧力の影響を大きく受け、圧力を下げると、この周波数は低下する。図 3.6 (c) に、一応、第三段階で現れる強力な励起波動の波形（ANT1 のみの信号）を示しているが、その周波数がオシロスコープのサンプリング能力を超えているため、波形は正しいものではなく、位相測定などは不可能である。ただし、パースト波でないことはわかるだろう。

繰り返すが、第一段階と第二段階でのヒステリシスは大きくなく、その非線形性は小さいと先に述べたが、ここで示した周波数スペクトルの調査からも、電子ビーム・プラズマ系に於ける波動については、放電開始前の状態ならば、確かに非線形性はあるが、線形理論からある程度説明可能と示唆される。

### 3.2.2 磁界強度と周波数スペクトル

第一、第二段階に於ける磁界強度と周波数スペクトルの関係を図 3.7 に示す。磁界強度は主コイルの電流値で表してあり、ガス圧力は  $5.9 \times 10^{-4} \text{ Torr}$  である。ヒステリシスがあるので、磁界強度を単調に増加したときの周波数特性となっている。また、波動を検出するアンテナ位置は 25 cm である。後で説明するが、このアンテナ位置によって波動振幅は大きく変化するので、周波数について議論する場合、振幅が小さすぎて、波動が存在するにも関わらず存在しない、と誤ることのないように注意しなければならない。



W0は、第一段階である図3.5(a)に示すスペクトルに対応したもので、磁界強度を増加すると周波数が増加する。その増加は、物理パラメータを固定するのが困難なため少し再現性に欠けるが、数多くの実験により確認すれば、明らかに、ここに示す図の傾向を示す。すなわち、磁界強度を0にしても周波数は0にならず、磁界強度とプラズマ密度に関係した混成周波数  $\sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}$  にほぼ等しい。

主コイル電流2.4Aの磁界強度に於いて、突然、不連続的にW1及びW2が同時に励起される。これらは第二段階に於ける図3.5(b)のスペクトルに対応するものである。この例ではW1, W2の周波数差はおよそ30MHz程度であり、W1, W2自体の周波数の数~10%位の割合である。この周波数差は磁界強度を変化しても、そう際だった変化はない。なお、図には、主コイル電流2.5A付近でW1のみが存在し、W2は存在しないが、これはW2の振幅が小さく、観測されてないだけである。一般に、W1とW2の振幅の関係は、第二段階に入ったばかりのときにはW1の方がW2の振幅より大きく、第二段階が深まればこの関係は逆になる。その上に、このW1, W2の周波数スペクトル幅について言及するなら、第二段階が深まると共にそれぞれが広くなり、第三段階である電子ビーム・プラズマ放電直前には、この2つの周波数スペクトル重なり、幅が広く2つには見えなくなる。図3.7はW1, W2のそれぞれの周波数スペクトルのピークをとって示してある。

第二段階に於いて、波動振幅の小さいものまで表示するなら、図3.8に示すようにA1(W1), A2(W2)以外のBやCの波動が存在する。CはA1の第2高調波であり、BはA2の周波数とA2-A1の周波数が加算されており、非線形現象が現れていると考えられるが、これらW1, W2以外の波動振幅はおおよそ2桁以上小さく、第二段階では線形性からそうはずれていないと、周波数スペクトルからいえる。A1, A2が磁界強度が小さいときは2つにきれいに分離しているが、磁界強度が大きくなると、先に説明したように、1つに重なっていることが見て取れる。また、B及びCがある磁界強度では消滅したようになっているがそうではなく、振幅が小さいだけであって、アンテナ位置を変化すると別の場所で観測され、存在しないということではない。

### 3.2.3 ガス圧力と周波数スペクトル

磁界強度を一定にして、ガス圧力を変えると、周波数スペクトルはどのように変化するであろうか。図3.9は、第一、第二段階の範囲に於けるその実験結果である。磁界強度は主コイル電流3A (100gauss), アンテナ位置は25cmであり、他は標準的なパラメータとしている。磁界強度対周波数スペクトル特性と同様に、ヒステリシスの存在があるので、圧力は単調増加で測定している。

W0は第一段階に存在する波動であり、圧力を上げると、周波数は急激に上昇する。これは圧力の増加が、より頻繁な電子ビーム衝突とより強い相互作用につながり、その結果、プラズマ密度が高くなるためと思われる。圧力が  $6 \times 10^{-4} \text{Torr}$  のところで、第二段階である波動W1, W2が不連続的に現れる。磁界強度を変化させたときと異なり、圧力を増加してもW1, W2の周波数の増加はほとんど見られない。また、その周波数差は磁界強度対周波数スペクトル特性と同様、やはり数~10%程度である。なお、第一段階と

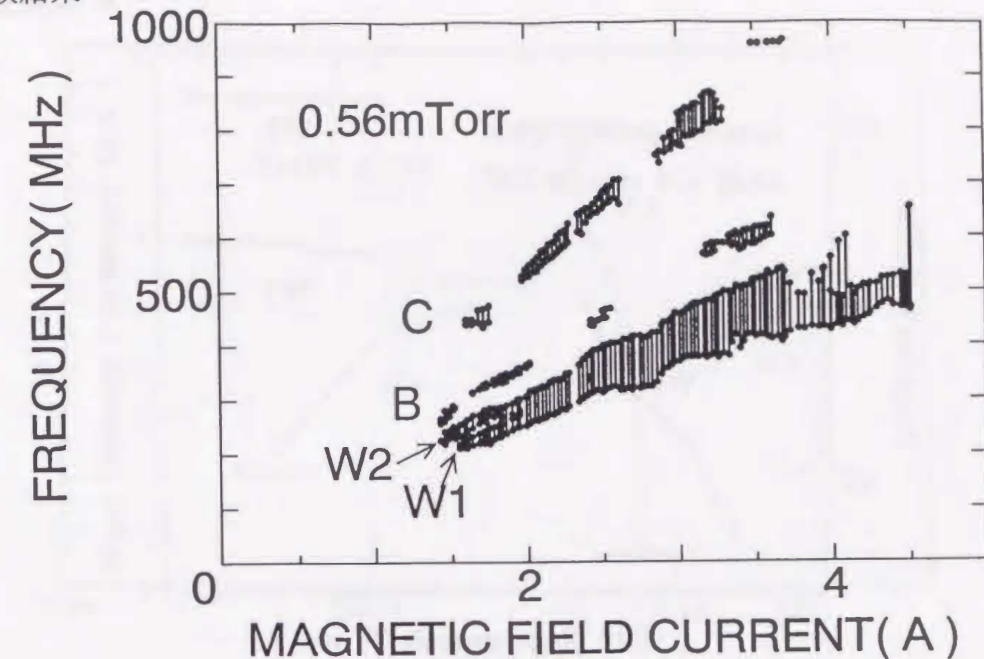


図3.8: 磁界強度(磁界コイル電流)対周波数 第二段階で励起される波動W1, W2の他に、非線形現象によると思われるB, Cなるきわめて弱い波動が観測される。

第二段階の境にあたる圧力付近は、突然の状態変化に伴うヒステリシスがあり、測定ができないので図には示していない。また、 $7.3 \times 10^{-4} \text{Torr}$ 以上の圧力では、第三段階である強い放電が生じているので測定をしていない。

### 3.2.4 周波数対波動振幅特性

波動振幅は周波数、位相、圧力などと違い、実験装置の精度(電子銃による電子ビームの一様性、磁界コイルの軸対称性、真空容器と磁界コイルの軸ずれ、アンテナと電子ビーム軸の平行性など)が確保されていなければ、意味ある測定はできない。しかし、アンテナを移動せず、磁界を一定にしたときの、ガス圧力変化による波動振幅特性は信頼できる。ガス圧力に代えて、電子密度と関係する周波数との特性を調べる方がよりよい。

図3.10は、ガス圧力を変化したときの、アンテナ位置25cmに於ける波動信号を、スペクトラム・アナライザで読み取り、その結果を表示したものである。各曲線の両端の数値はその点に対応するガス圧力である。ガス圧力を0.36mTorrから0.72mTorrまで増加すると(ただし、0.44mTorrから0.46mTorrの間はヒステリシスのため測定できない)、周波数と波動振幅は3つのグループにきれいに分かれる。これが、それぞれ第一段階のW0, 第二段階のW1, W2になることは、スペクトラム・アナライザで確認している。ガス圧力が0.36mTorrから0.44mTorrまでのときW0が励起され、0.46mTorrから0.72mTorrまでのときW1, W2が励起される。W0は周波数、すなわちプラズマ密度が高くなると、その振幅が増加する。W1は、圧力の増加にも関わらずほとんど周波数が上がらないが、その振幅は減少する。一方、W2は圧力の増加にも関わらず、W1以上に周波数は変化せず、しかし、振幅についてはW1とは逆に減少する。



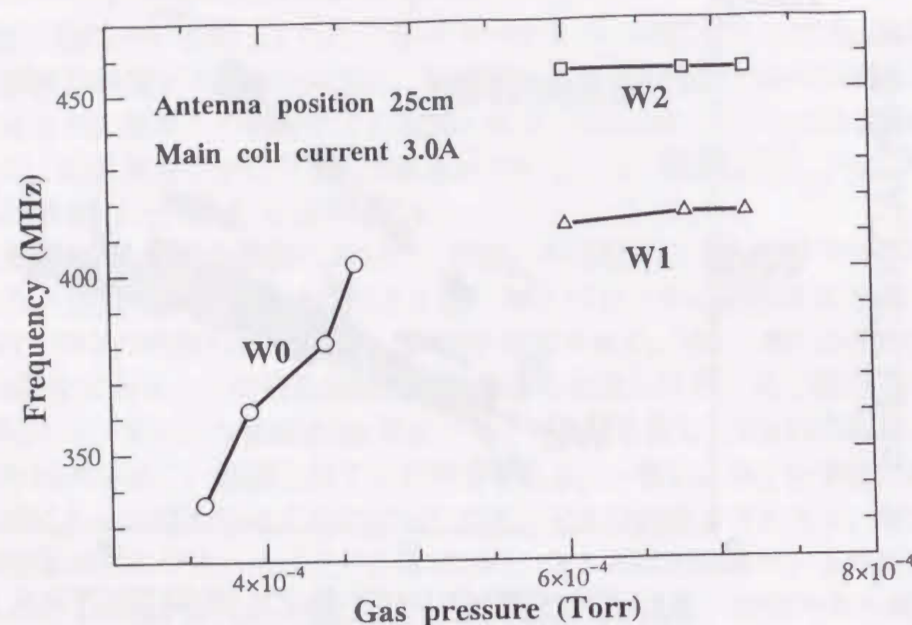


図 3.9: ガス圧力対周波数 第一段階の波動  $W_0$  の周波数は圧力を増加すれば高くなる。しかし、第二段階の  $W_1, W_2$  は変わらない。ヒステリシスのため、第一段階と第二段階の間は測定されていない。

### 3.2.5 波動の時間的变化と位相特性

既に言及したように、第一段階に現れる波動  $W_0$ 、及び第二段階に現れる  $W_1, W_2$  なる波動は、いずれも時間的に連続する波動ではない。それは、 $W_0$  については図 3.6 (a) に、 $W_1, W_2$  については図 3.6 (b) に示すような波動で間欠的なバースト波となっている。どれも、電子ビームとの相互作用により波動が励起され、その振幅が大きくなった後、何らかの原因で波動成長が止まり、振幅が飽和して、その後に波動は減衰してしまう。そして、一定の休止期間の後、再び波動が立ち上がる。これが次々と繰り返される。電子ビーム・プラズマ放電の研究に於いて、このバースト現象はよく知られており、理論もいくつか考えられてはいるが、定説となるまでには至っていないようである。しかし、このバースト波の機構を知ることこそ、電子ビーム・プラズマ系を理解する上で重要ではないかと思える。バースト波は、何人かの独立な研究者が行った実験 [21, 63] に於いても見られることから、実験装置の不安定性によるものではなく、電子ビーム・プラズマ系固有の本質的なものであろう。波動のあるなしというこのはっきりとした現象は、数式に頼らずとも、その本質を言葉で説明できるはずであるし、また理解できなければならないだろう。

さて、 $W_0$  であるが、図 3.6 (a) を詳しく説明すると、アンテナ位置が同じ 25cm にあり、互いに  $48^\circ$  の角度をなす 2 本のアンテナで検出した信号を示してある。波動の継続時間はこの例では、 $1\mu\text{sec}$  前後となっているが、多くは、圧力などのパラメータを変えても、数  $\mu\text{sec}$  程度までである。アンテナ ANT1, ANT2 の信号を見れば、波動の励起、休止時間が同時に起こっていることは明らかで、その振幅波形も同じであるが、実は、それぞれの波動を拡大した図 3.11 (a) に示されるように、ANT1 の位相が ANT2 の位相より  $0.45 \times 10^{-9}\text{sec}$  遅れている。これは波動の周期  $3.2 \times 10^{-9}\text{sec}$  (313MHz) から考えると、位

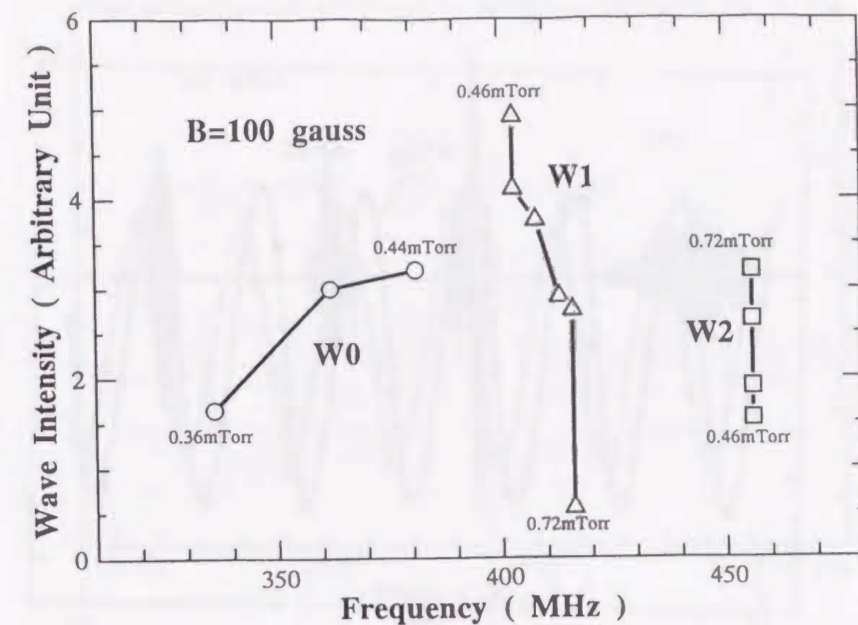
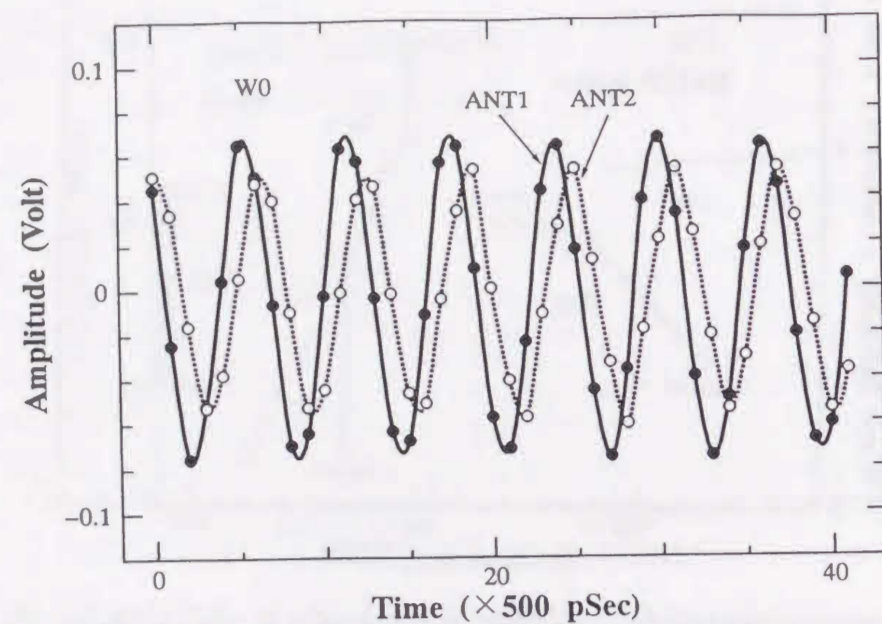


図 3.10: 励起波動の周波数対振幅 各曲線の両端の数値はガス圧力である。第一段階の波動  $W_0$  はガス圧力を増加とすれば、周波数と振幅は共に大きくなる。第二段階の  $W_1, W_2$  はガス圧力の増加しても周波数は余り変わらない。しかし、ガス圧の増加と共に、振幅  $W_1$  は減少し、 $W_2$  は増加する。

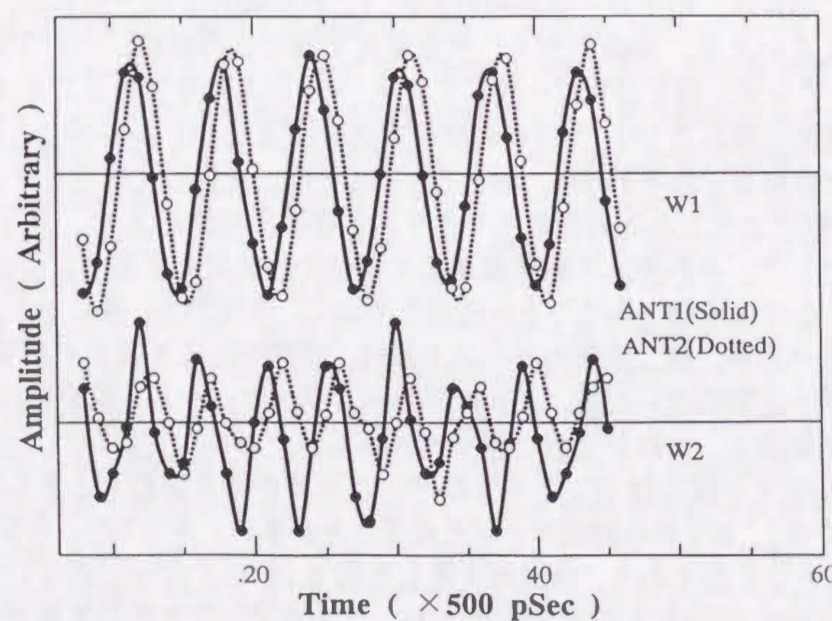
相角  $50^\circ$  ( $0.45/3.2 \times 360^\circ$ ) に相当し、アンテナ ANT1, ANT2 のなす角度  $48^\circ$  にほぼ等しい。したがって  $W_0$  は、電子ビームの進行方向（これは磁界方向でもある）に向かって、右回り波であるといえる。実験パラメータを変えて異なる周波数について数多く調べたが、位相遅れとアンテナ角とが常に一致しており、 $W_0$  が右回りであることは確かである。

次に、第二段階に現れる  $W_1, W_2$  の時間的变化を図 3.6 (b) から  $W_0$  と同様に見てみよう。これらの波動がそれぞれ  $W_1, W_2$  であることは、受信した信号をオシロスコープの FFT 解析機能により 2 本の周波数スペクトルの存在を確認した上で、図 3.11 (b) のように時間拡大をして、それぞれの周波数成分の高低から決定してある。ここで  $W_1, W_2$  を同時に観測するのは困難であることを注意しておく。すなわち、後にコレクタ電流特性のところでも述べるが、第二段階のバースト波は、時間的により詳しく説明すると、 $W_1$  のバースト波が一定期間続いた後、これに代わって  $W_2$  のバースト波が現れ、 $W_1$  と同様にこれが一定期間続く。これが交互に繰り返されるのである。したがって  $W_1, W_2$  が時間的に同時に存在する機会は  $W_1$  と  $W_2$  のバースト波が切り替わるときしかなく、しかも、このときは  $W_1, W_2$  共の振幅が小さくなることが多い。さて  $W_1, W_2$  の性質であるが、 $W_1$  は  $W_0$  とよく似ており、時間拡大をした図 3.11 (b) に示されているように、アンテナ ANT1 の信号位相が ANT2 のものより、2 本のアンテナのなす角度  $48^\circ$  相当分だけ進んでいる。これは  $W_1$  が右回り波であることを意味する。一方、 $W_2$  の方はアンテナ ANT1, ANT2 の信号位相差は全く不規則であり、右回り波であるとはとてもいえない。図 3.11 (b) のような短い時間間隔ではなく、波動が連続している全位相を調べると、位相が遅れたり進んだり、この不規則性はさらにはっきりとするが、長い時間間隔の図示





(a) 第一段階



(b) 第二段階

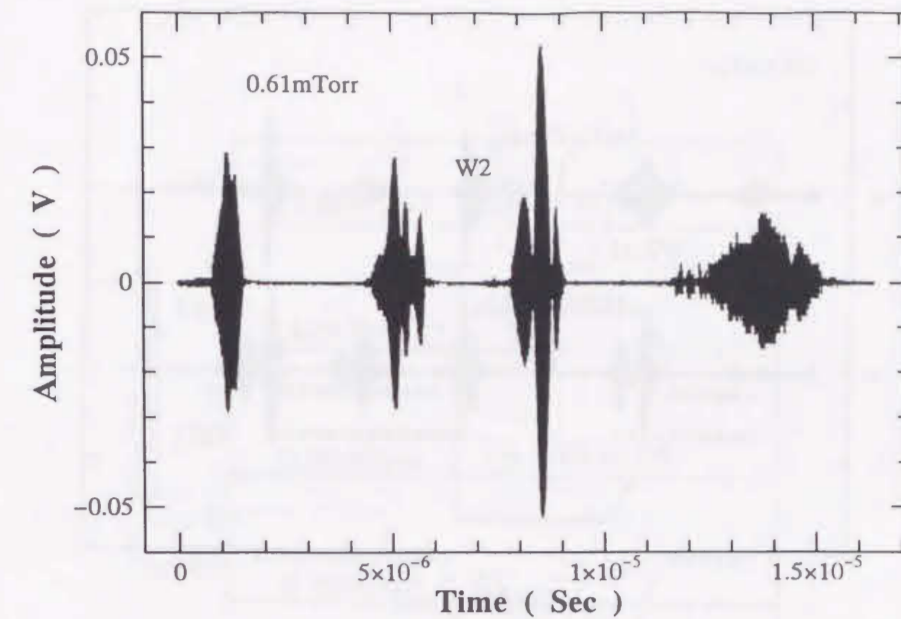
図 3.11: アンテナ ANT1 と ANT2 (互いになす角  $48^\circ$ ) の信号位相差

図 3.12: 第二段階に現れる波動 W2 の波形 第一段階の W0 や第二段階の W1 と異なり、その法楽包絡線は激しく変動する。FFT で周波数分析すると、2 ~ 3 の周波数成分があり、正弦波のうなりの結果と考えられる。

は困難なので、ここではその説明だけにしておく。

W1 と W2 の違いは、その振幅波形にもよく表れている。W1 は、図 3.6 (a) に示す W0 と同じように、パースト波の一つひとつの振幅波形が、単調に増加し、飽和し、減少するという滑らかな波形である。しかし、W2 はその振幅がごく小さい場合を除いて、一般に、図 3.12 に示すように、とげとげしくランダムとも思える波形となる。このとげとげしさは、第二段階でも圧力が高い方が激しく、放電直前は相当なものになる。また、このランダムな波形は同じ位置にあるアンテナ ANT1, ANT2 でかなり異なる。図 3.13 に W2-a1 及び W2-a2 と記してある波動は、同時時間帯に存在することから、同じ波動と考えられるが、角度の違うアンテナで観測するとこのように全く別の振幅波形になっている。ところが、それに続いて表れる波動はよく似た振幅波形となっている。

W2 のこうした奇妙な性質は、W2 がある一つ波動と考える限り、理解し難いものであるが、周波数の接近した 2 つあるいはそれ以上の波動が、同時に現れて合成されたものとするなら、うなり現象で簡単に説明できる。同じ位置にあるアンテナ ANT1, ANT2 の受信信号が全く異なるときは、軸対称波と右回り波といった偏波の違う波動の合成でなければならない。このことは、後で、FFT による W2 の周波数分析を示す際にも、位相変化及び周波数と関連させて述べよう。

### 3.2.6 位置による波動の位相変化

ビーム・プラズマ系に生ずる波動励起機構を解明する上で、波動の周波数と共に、その位相がどう変化しているかを知ることは重要なことである。波動振幅も大事ではあるが、



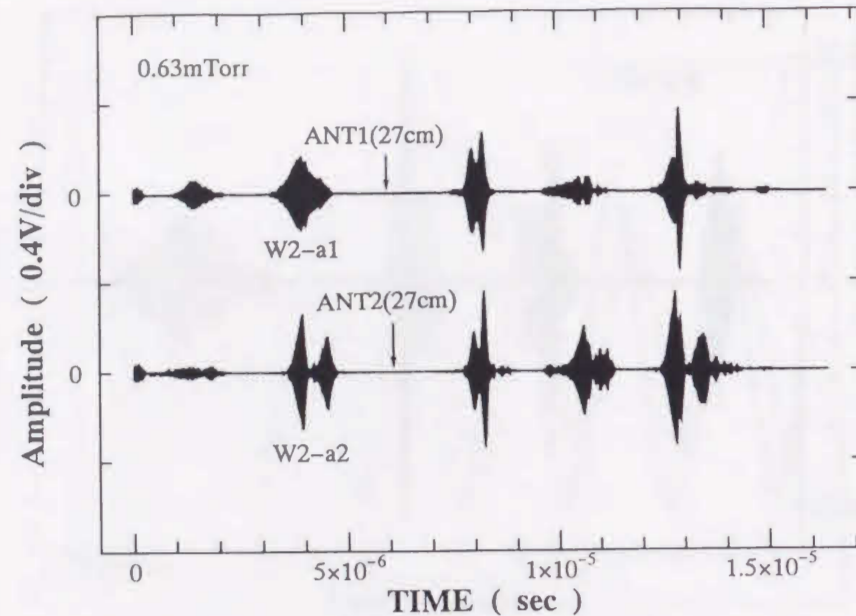


図 3.13: 第二段階の波動 W2 を同位置にあるアンテナ ANT1 と ANT2 (互いになす角 48°) で受けたときの信号 この波形の違いから、周波数だけでなく、偏波の異なる波動が存在し、それがうなりを生じていると考えられる。

実験パラメータを安定に保つことが困難な場合が多く、また、放電開始直前付近の不安定性は、数多くの実験結果をして統計的に処理する他なく、振幅強度についての測定は周波数、位相に比べ、信頼性に劣る。

図 3.14 に第一段及び第二段階でそれぞれ励起される W0, W1 の場所的な位相変化を示す。▽ はアンテナ ANT1 の位置であり、この位置の位相を基準 0° とし、アンテナ ANT2 の位置を変化させたときの、各波動の位相変化を表してある。位相差の検出は ANT1, ANT2 の信号を二重平衡変調器 (ミキサ) に入力し、出力であるそれら入力積から決定している。すなわち、ANT1, ANT2 の入力  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  を次式とすれば、

$$f_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \theta_1) \quad (3.1)$$

$$f_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \theta_2) \quad (3.2)$$

その積は次のようになり、

$$f_1(t)f_2(t) = \frac{A_1 A_2}{2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(2\omega t + \theta_1 + \theta_2) \} \quad (3.3)$$

ここで、フィルタにより高周波成分 ( $2\omega$ ) の除去をすれば、位相差を求めることができる。ただし、入力の振幅  $A_1$ ,  $A_2$  が測定されていなければならない。

さて、W0 であるが、既に述べたように、その振幅波形は図 3.6 (a) に示すようなもので、パースト波である不安定さを考えると、位相を細かく決定できるほどの精度があるとは思えない。しかし、波動の位相が位置 17cm 及び 31cm 付近で、急激に 0° から 180° あるいはその逆に変化していることは、十分信頼できるものである。なぜなら、基準位相と

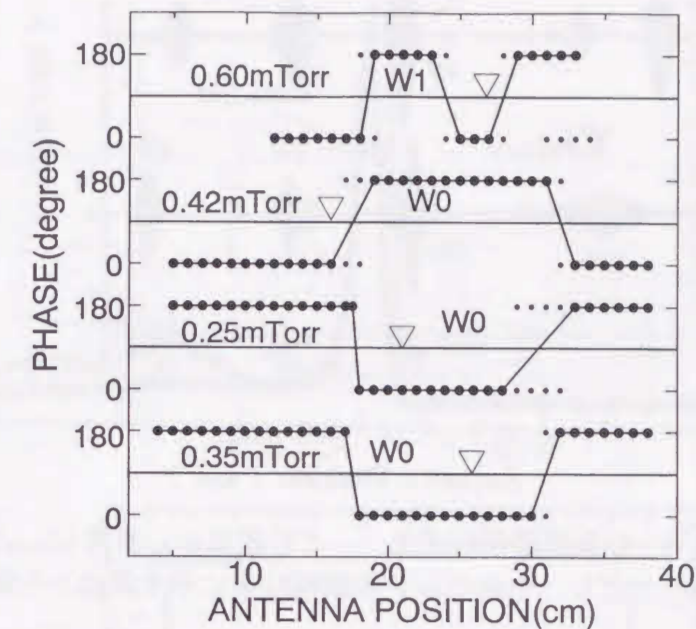


図 3.14: 第一段階の W0 及び第二段階の W1 の場所的位相変化 ▽ を基準位相 0° とし、他の場所の位相を測定した。これから波長がわかる。

している ANT1 位置 ▽ を移動させてゆくと、例えば、位置 17cm を通過するとき、突然、位相が反転する事実があり、これはこの点で位相が逆転していると考えるのが自然である。具体的に図 3.14 の圧力 0.25mTorr と 0.42mTorr の例で見てみよう。▽ の位置が 17cm を挟んで反対側に位置しているが、位相関係は反転している。このことから W0 は定在波であると結論でき、位置 17cm 及び 31cm はその定在波の節になっているはずである。節から節までの距離が半波長に相当することから、その波長はおよそ 30cm である。この例では、プラズマ容器内に 1.5 波長の定在波が励起されているが、より圧力を下げれば、1 波長の定在波も励起される。ただし、これまで半波長の定在波を観測したことはない。W1 については、W0 のように、基準アンテナ ANT1 の位置 ▽ の変化により、突然、明瞭に位相が逆転するようなことはない。したがって、はっきりとした定在波ではない。しかし、ANT1 の位置 ▽ を固定しておくなら、位相が多少不安定で計測し辛い面はあるが、図 3.14 に示すような位相関係が得られる。なお、図 3.14 では、W0 についてもそうであるが、不安定性により位相を定量的に決めることが難しく、ミキサ出力の負、正をもって、位相 0°, 180° と表示してある。この結果によれば W1 の波長はおよそ 10cm 程度となる。位相が不安定なのは、純粋な進行波でなく、コレクタ電極による反射波が同時に存在し、それが変動するからであろう。実際、その証拠として、位置による W1 の波動振幅を測定した結果を図 3.15 に示すが、その振幅の山から山までの距離が 1/2 波長に相当する



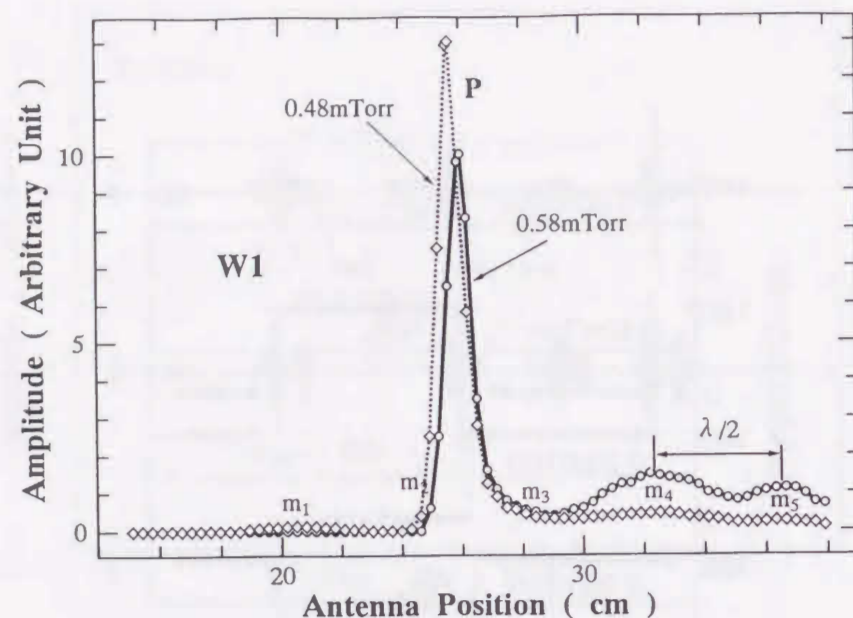


図 3.15: 第二階の波動 W1 の場所的振幅変化 この波形から波長 10cm 程度で進行波成分を持つことがわかる。ただし、中央の山 P の振幅は後に示す理由から除く必要がある。

ことを考えれば、この距離として 5cm 程度のもの（図の P で示してある大きな山は後で議論するが、装置誤差によると思われる、この山を除いて考察するなら  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_4$ ,  $m_5$  と 5cm 間隔に波打つピークが見られる）があり、波長 10cm にちょうど一致する。しかも、この振幅を見ると、進行波だけでなく反射波も存在している。

ところで、W2 の位相については、きわめて不安定なもので、安定した定在波や進行波としての性質はまったく観測されない。このことは、W2 が周波数の接近した 2 つあるいはそれ以上の異なった性質を持つ波動の入り交じり、という前節で述べたことを裏付ける。

### 3.2.7 波動信号のフーリエ変換

第二段階の現れる波動 W2 は、その包絡線の変動の激しさから、周波数の異なるいくつかの正弦波の集まりではないかと推測した。周波数スペクトラム・アナライザでこれを確かめるのは、しかし、W2 がバースト波であり、その各成分の周波数には、かなりなばらつきが見られることから困難である。そこで、デジタル・オシロスコープで得た波形データを FFT により分析することにした。

その前に、簡単に W0, W1, W2 の FFT による周波数スペクトルを見ておこう。

図 3.17 は、図 3.16 の  $W_a(W0)$ , W1,  $W_b(W2)$  について、それぞれの周波数スペクトルを FFT により求めたものである。周波数スペクトラム・アナライザによる図 3.5 ではわからない（バースト波成分には個々に周波数のばらつきがある）細かい特徴が見て取れる。

$W_a(W0)$  は 325MHz を中心に 10MHz 程度の周波数幅がある。これは図 3.16 のバースト波成分が時間的に周波数変化を起こしているからで、波形観測をすれば、その励起開始時には周波数が高く、時間と共に低くなっていることがわかる。W1 は 413MHz を中心に

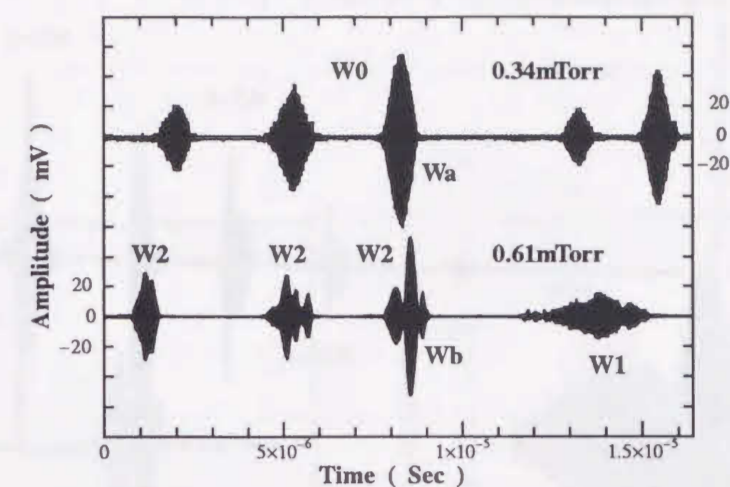


図 3.16: バースト波

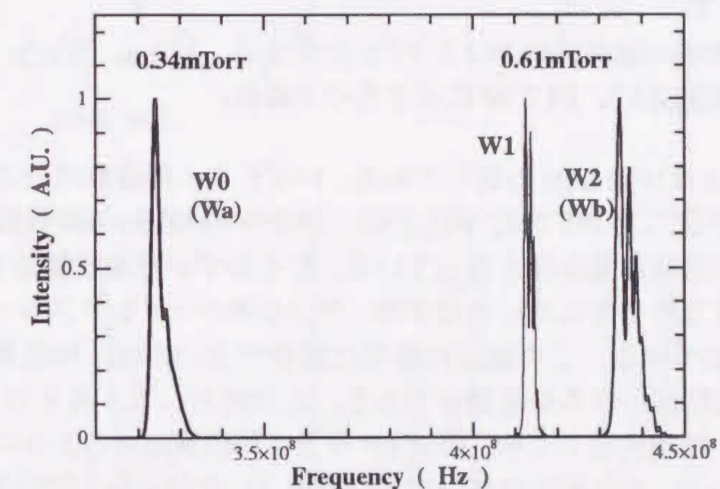


図 3.17: バースト波成分の周波数スペクトル

5MHz 程度の周波数スペクトル幅を持つが、この中には 1MHz 以下の幅を持つ鋭いピークがいくつか見られる。周波数の少し異なる波動の同時存在は、うなり現象を生じさせるはずで、図 3.16 に於ける W1 の包絡波形にはこれが現れているのであろう。Wb(W2) は 437MHz を中心に 10MHz 程度の周波数スペクトル幅を持ち、W1 と似て、1 ~ 2MHz 程度の幅を持つ鋭いピークがいくつかある。W2 の包絡波形は複雑に見えるが、W1 と同様、うなり現象として理解できる。しかし、W1 と W2 には明らかな違いがある。それは ANT1 と ANT2 の受信信号の包絡波形である。W1 は常に ANT1, ANT2 の受信包絡波形が同じであるのに対し、W2 の包絡波形はバースト波成分によって同じであったり異なったりする。これは、W1 が右回り波のみから成り、W2 は右回り波、左回り波、軸対称波から成ることを意味する。

さて、図 3.18 に、標準的な実験パラメータで得た W2 の典型的なバースト波形を示す。ここに見られる W2-a, W2-b, W2-c, W2-d のバースト成分について、それぞれ FFT 分



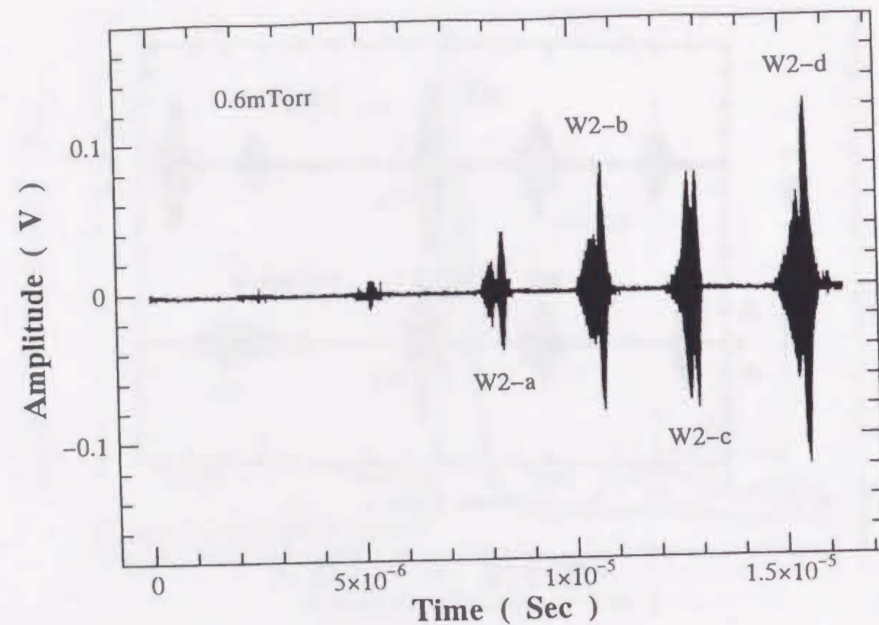


図 3.18: この第二段階の励起波動 W2 を FFT 分析する。W2-a, W2-b, W2-c, W2-d について、その結果は図 3.19, 図 3.20 に示すものとなる。

析した結果は図 3.19 及び図 3.20 の通りである。いずれも、周波数成分に 2~3 の鋭いピークを持つことがわかる。この例では、明らかに、およそ 440MHz の周波数で互いに数 MHz 程度離れた 2 つの正弦波の集まりとなっている。ごくわずかな周波数差を持つ 2 つの正弦波の和であれば、うなりを生じているはずで、デジタル・オシロスコープで得た波形を時間軸拡大して確認できる。この確認に非常に都合がよいのは、同位置にあるアンテナ ANT1, ANT2 の波動信号が異なる場合である。この例として、図 3.21 を見てみよう。

上の図の波形は、励起波動 W2 を、角度 48° をなす同位置にある 2 つのアンテナ ANT1, ANT2 で受けたもので、それぞれの波形はかなり違う。すなわち、図の E に示す時刻での ANT1 信号は、振幅は大きい、同時刻での ANT2 信号はその振幅が 0 である。この時刻周辺を拡大して、その位相をあらわにしたものが下の図である。点線が ANT1 信号で実線が ANT2 信号になっている。点線の信号は振幅が大きく、その振動波形は単調に続いているが、実線の信号はそうではない。時刻 E より左では、実線と点線の波形は同相だが、右では逆相である。これは通信工学でいう、周波数の近い 2 つの正弦波 (USB と LSB) の和で表される SSB 変調波とちょうど同じである。ここで述べた事実から、第二段階に現れる励起波動 W2 は、偏波の異なる 2~3 の波動から成り立っているといえる。

### 3.2.8 コレクタ電流特性

電子ビーム・プラズマ系に励起される波動を周波数、位相以外から調べる方法としては、簡単ではあるが、電離状況が反映されたコレクタ電流に着目するのがよい。波動とコレクタ電流の時間的な関係に対応させれば、波動励起機構についてかなりの情報が得られる。

図 3.22 (a) は、第二段階に於けるコレクタ電流及びアンテナ ANT1 (アンテナ位置

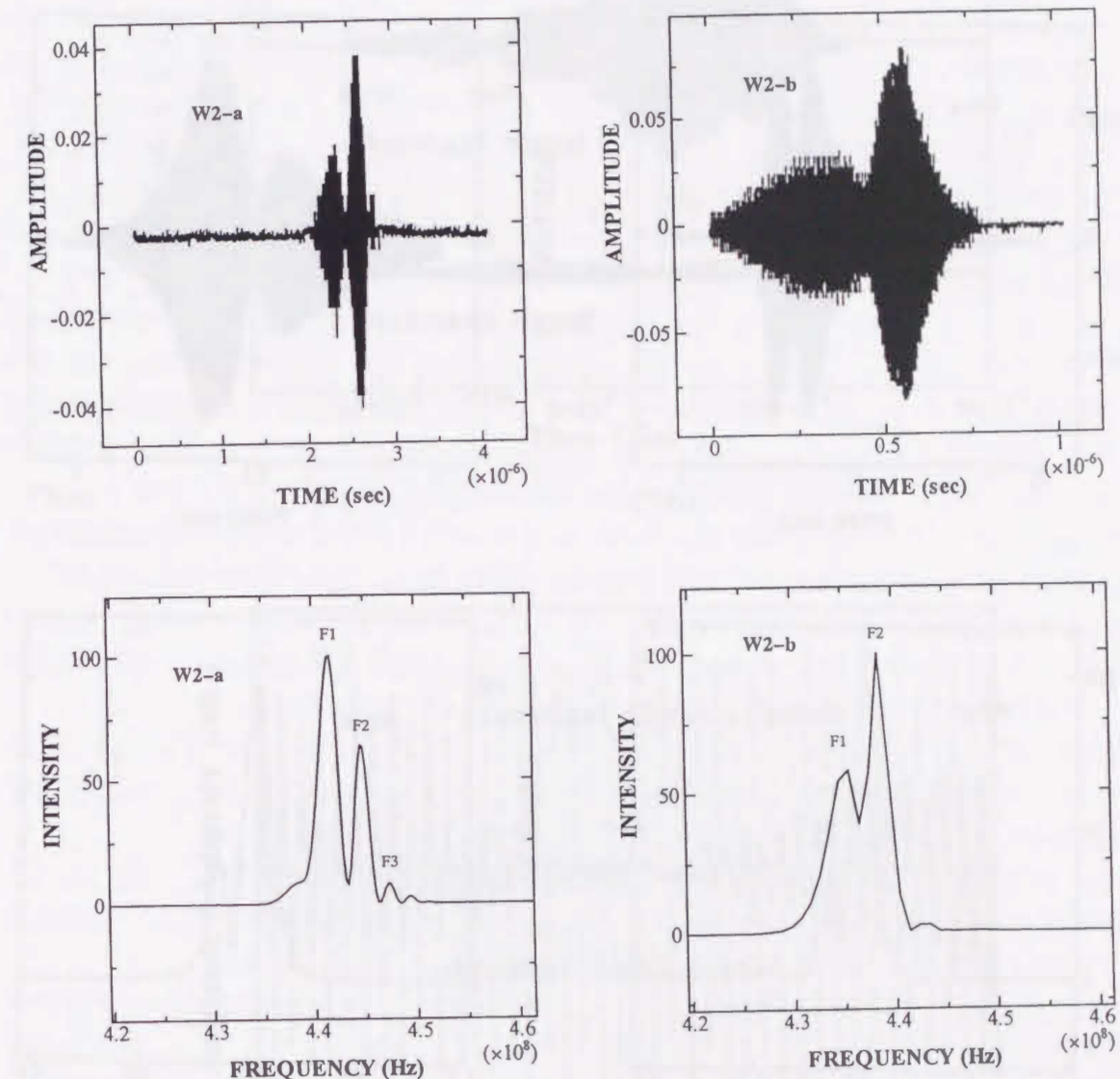


図 3.19: 図 3.18 の W2-a, W2-b の拡大図 (上) とその FFT 解析結果 (下) いずれも F1, F2 の大きなピークがあり、2 つの正弦波から成る。



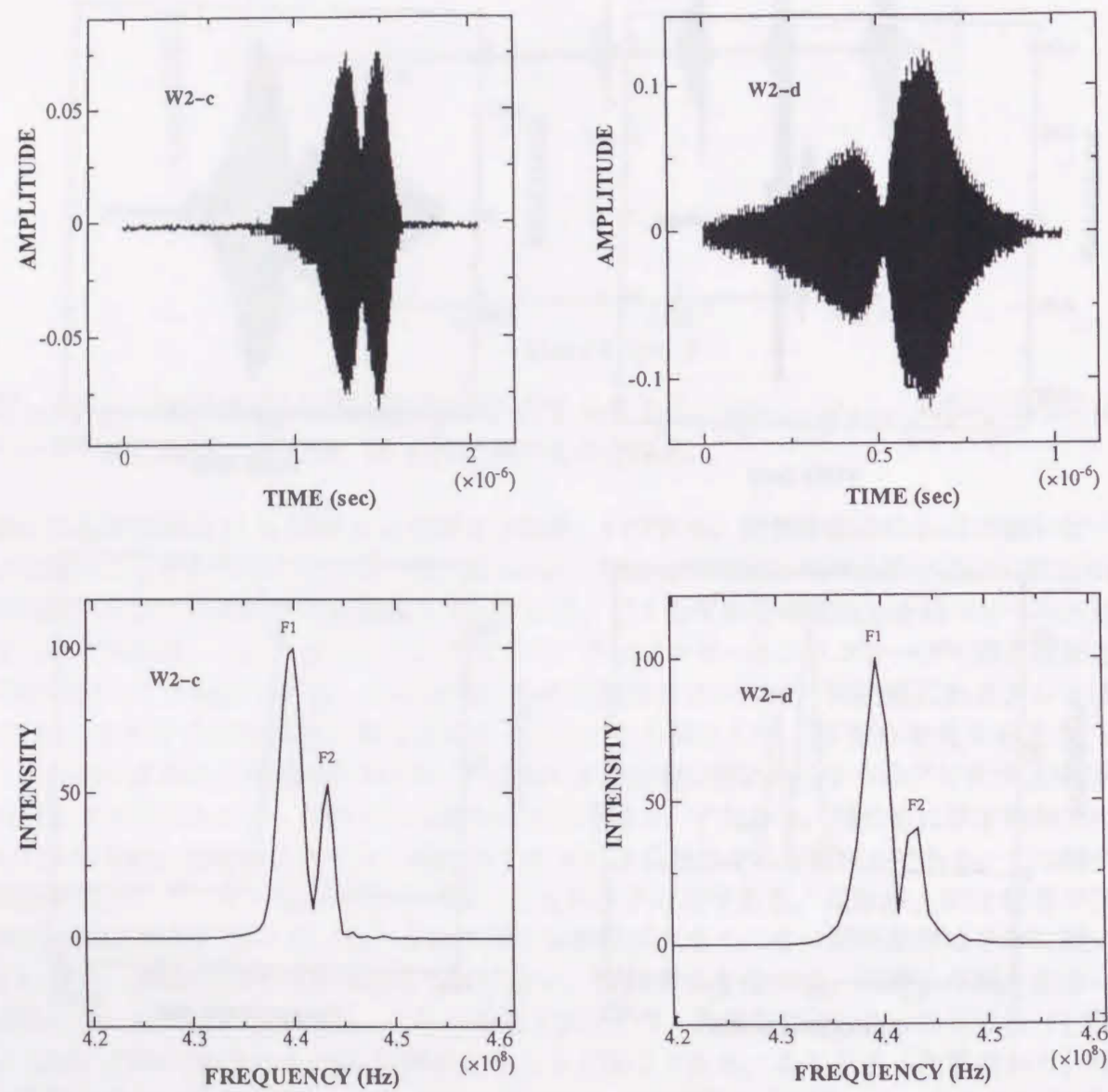


図 3.20: 図 3.18 の W2-c, W2-d の拡大図 (上) とその FFT 解析結果 (下) いずれも F1, F2 の大きなピークがあり, 2つの正弦波から成る。

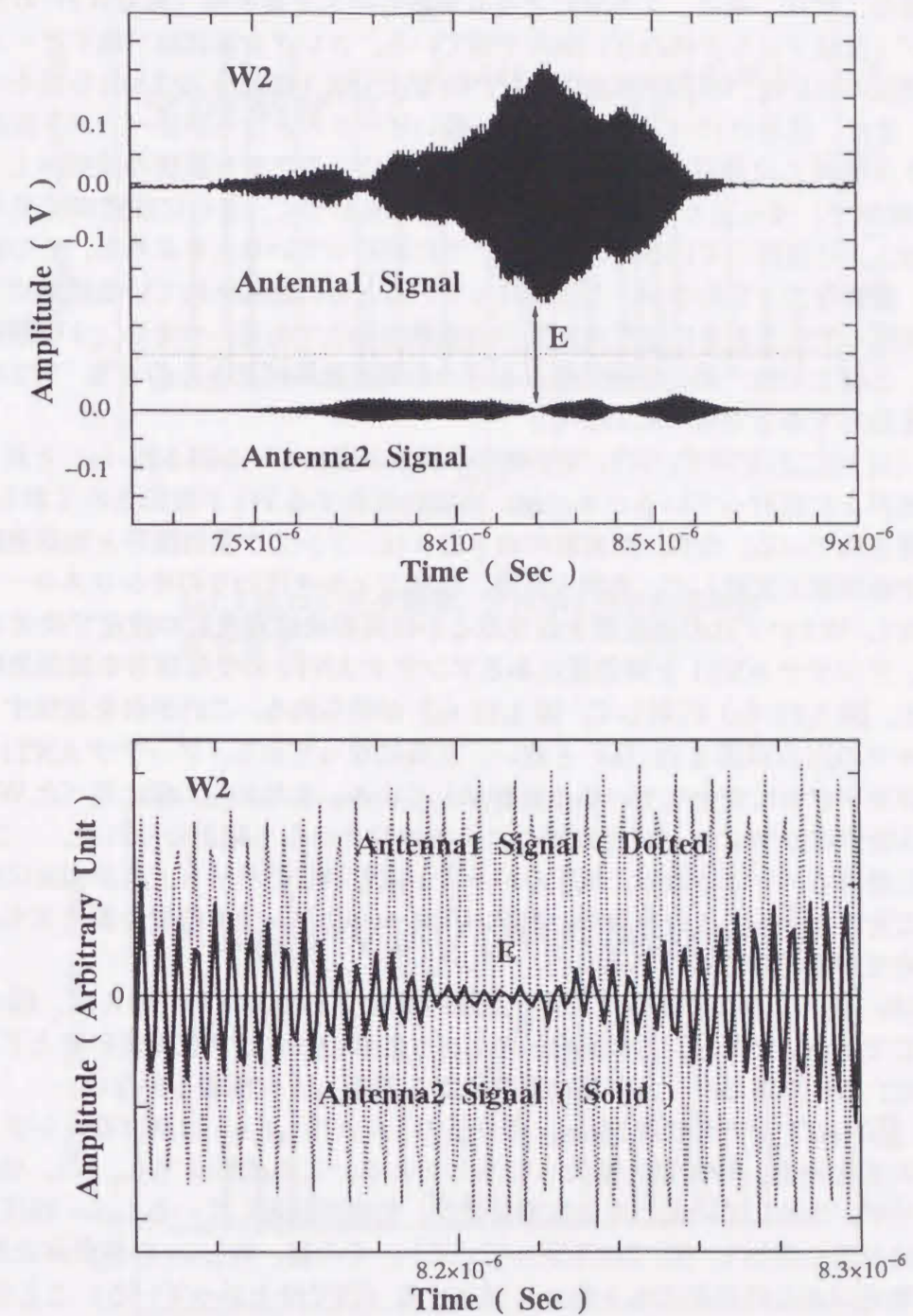


図 3.21: (上) 角度  $48^\circ$  をなす2つのアンテナ ANT1, ANT2 で受信した第二段階の励起波動 W2 同アンテナ位置にも関わらず, その波形はかなり異なる。(下) 上の E 点を拡大したもので, アンテナ ANT1 (点線), ANT2 (実線) の信号は E 点の左では同相, 右では逆相になっている。



38cm, ガス圧力  $5.8 \times 10^{-4}$ ) で受信した信号の包絡線の二乗を同時時間軸で示したものである。包絡線の二乗は、単に、ミキサによる自乗検波出力を帯域幅 (30MHz) の狭いオシロスコープ (低域フィルタ代わり) 出力で得ている。コレクタ電流値 (電子ビーム電流とプラズマ電流の和) は、右の座標値にからわかるように、電流が下にふれる程その絶対値は大きい。また、信号はバースト波であり、鋭いピークのところが各バースト波成分である。コレクタ電流  $I_c$  に着目すれば、 $-17\text{mA}$  を中心に、のこぎり波状の波形が上下に (数十  $\mu\text{sec}$  の周期で) ゆったりと波打っていることに気がつく。さらに注意深く見ると、のこぎり波は、上に波打っているときの方が、下に波打っているときよりも、その波長が長い。また、重要なことであるが、上に波打っているときに励起されている波動は W1 であり、下に波打っているときに励起されている波動は W2 である。つまり、2種類の波動が存在する。このことは、第二段階に現れる2つの周波数スペクトルのうち、W2の周波数のみを抜き取ってみると直ぐにわかる。

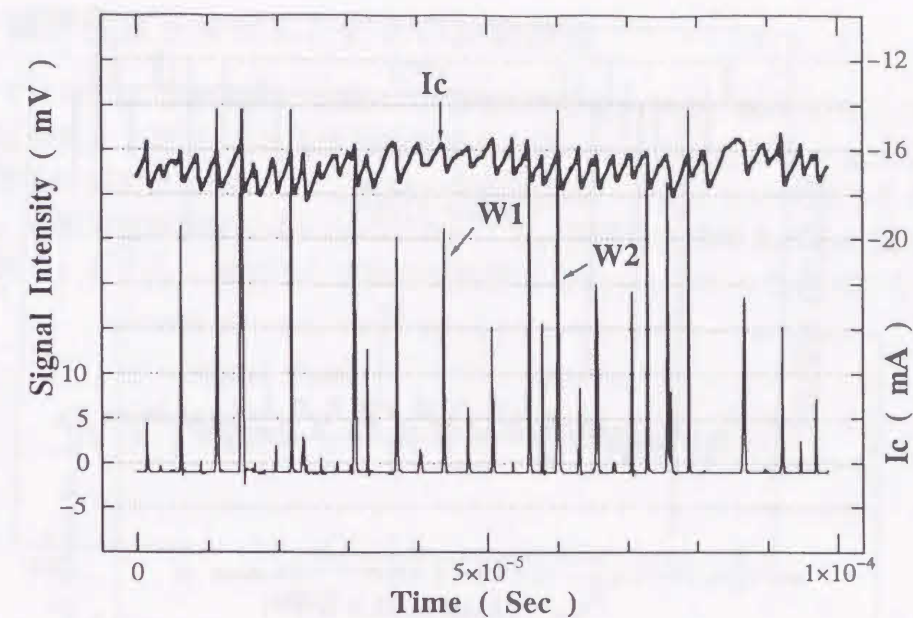
図 3.22 (b) にこれを示す。W1, W2 両方の信号が現れている図 3.22 (a) と異なり、コレクタ電流が上に波打っているときには、実際に存在する W1 が検出されておらず、W2 のみが観測されている。なお、周波数の抜き取りは、アンテナ受信信号と局部発振器出力をミキサで低周波に変換して、先程と同様、低域フィルタ代わりのオシロスコープで行っている。W1, W2 いずれの周波数を抜き取るかは局部発振周波数の設定で決まる。

さらに、アンテナ ANT1 と同位置にあるアンテナ ANT2 の受信信号を局部発振器出力に変えると、図 3.22 (b) に対して、図 3.23 (a) が得られる。これが何を意味するかといえば、ミキサの出力が図 3.22 (b) と違い、正負になっており、アンテナ ANT1, ANT2 の位相差がランダムに変化していることを示している。すなわち、前に述べた W2 の位相のランダムさがオシロスコープとはべつにミキサ出力からも確かめられた。こうして、第二段階に於けるバースト波は、W1 のバースト波と W2 のバースト波が交互に繰り返されていることがわかる。この現象は、実験パラメータやアンテナ位置を変えても、常に現れるきわめて一般的なものである。

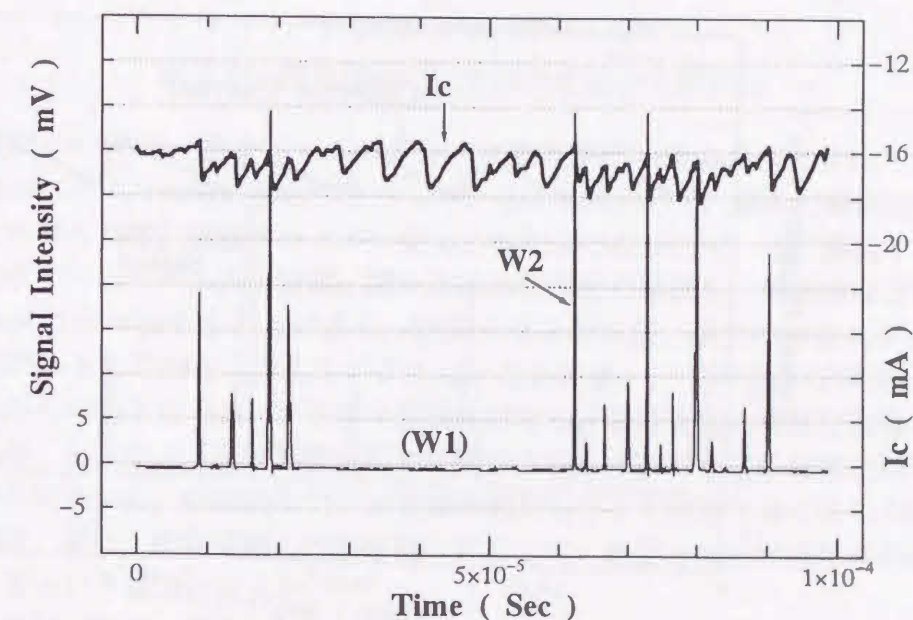
それでは、第一段階に於けるコレクタ電流特性はどうであるかといえば、図 3.22 (a) とほぼ同じである。ただし、この場合、のこぎり波状のコレクタ電流波形は上下に波打たない。また、W0 であるバースト波は周波数から判断して一種類しかない。

図 3.23 (b) にアンテナ位置 26cm, ガス圧力  $5.6 \times 10^{-4}\text{Torr}$  に於けるコレクタ電流と波動信号の変化例を、時間軸を拡大して示してある。この波形は W0, W1, W2 の波動励起によらず、共通している。その波形変化は、波動が励起している  $1\mu\text{sec}$  程度の間にコレクタ電流が急に増加し (図では下がっている)、その後、数  $\mu\text{sec}$  の波動休止期間中に、コレクタ電流がある時定数のもと徐々に減少する (図では上がっている) ことがわかる。

一体、数十  $\mu\text{sec}$  周期のバースト波 W1 と W2 の交代や数  $\mu\text{sec}$  周期のコレクタ電流の変動は何によるであろうか。このことは、電子ビーム・プラズマ放電を解明する上で、重要な鍵になると思われ、後で検討する。



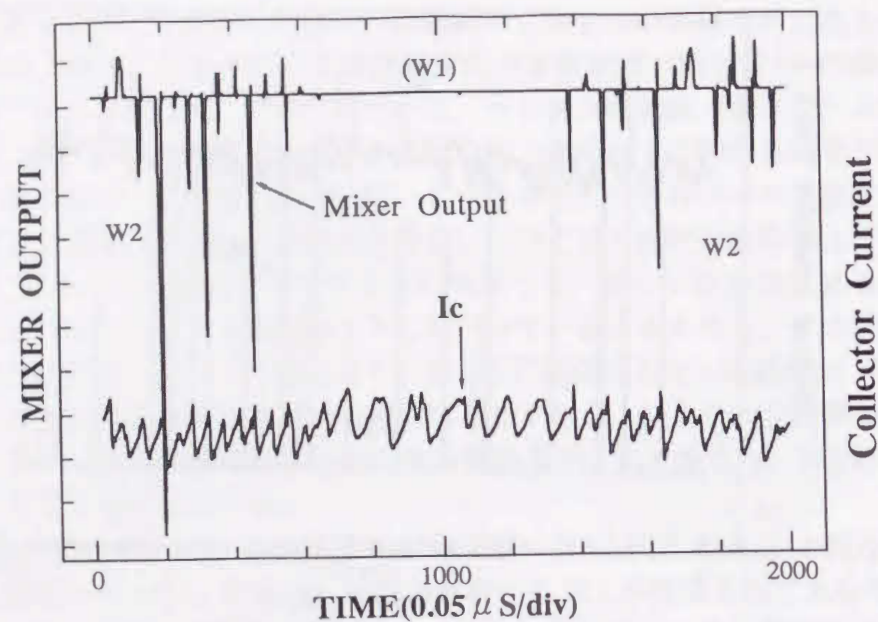
(a) 上はコレクタ電流, 下は W1, W2 の信号強度を表す。



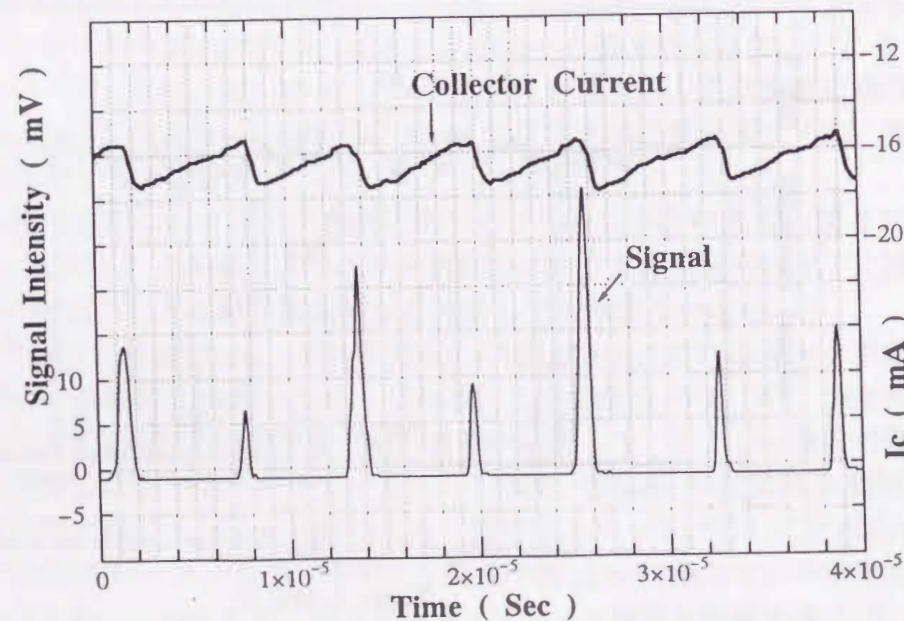
(b) 上はコレクタ電流, 下は W2 のみの信号強度を表す。

図 3.22: コレクタ電流と励起波動の時間変化





(a) 上はW2信号（詳しくは本文），下はコレクタ電流



(b) 上はコレクタ電流拡大図，下は励起波動強度

図 3.23: コレクタ電流と励起波動の時間変化

### 3.2.9 磁界強度を変化したときの波動位置

これまでに述べた波動実験の結果は時間的なものばかりで，場所的なものは，図 3.14 の場所的位相変化と図 3.15 の場所的振幅変化を除いて，ほとんど取り上げなかった。それは，場所的位相変化は別にして，波動の振幅測定は，プラズマの性質やその不安定性を考えると，実験装置が精度のよいものであっても，信頼性を確保するのが難しいと考えてのことである。しかし，場所的な波動の振幅調査を全くしなかったのではない。

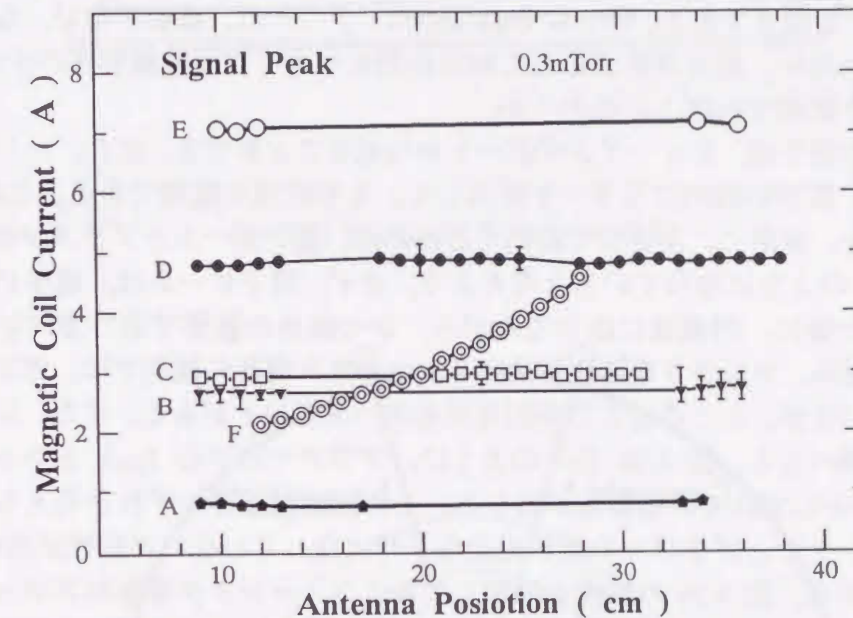


図 3.24: 磁界強度による励起波動の位置変化

振幅特性については，電子ビーム・プラズマ放電が開始前の状態に於いて，時間的である周波数スペクトルが強い線形性を示しているにも関わらず，場所的振幅変化には線形性の片鱗すら見られず，実験データの一貫した解釈につながらず，ただ混乱するばかりであった。電子ビーム・プラズマ放電に関する他の研究者の結果も，周波数など時間的側面を持つデータには一致することが多く，疑問点は少ないが，場所的側面のデータとなると，一般性があるものかどうかよくわからないことが多い。このような状況に於いては，場所的側面からの電子ビーム・プラズマ放電に対する非線形理論の検証は困難な状況にあると思われる。ともかく，実験装置固有の特性が本質をゆがめた実験結果を導くのではないか，という考えから，時間的なデータを場所的なものより信頼することになった。場所的なデータは，逆に，実験装置の特性を見つけ出して，本質とは無関係はものを取り除くのに利用するという観点に変えた。

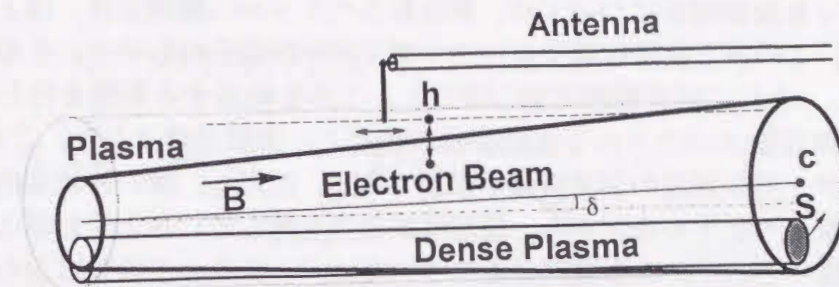
こうした中で，特に，着目したのがここに述べる磁界による励起波動の位置変化特性である。図 3.24 にこれを示す。横軸はアンテナの位置（電子銃側入り口を 0cm とする）で，縦軸が磁界電流になっている。マークされた点は，磁界強度と図 3.15 で P と標された点のアンテナ位置である。すなわち，この図は磁界を変化させて，場所的な波形のピーク（図 3.15 のように幅はある）がどのように移動するかを調べたものである。このときガス圧力は 0.3mTorr で，電子ビーム・プラズマ系は第一段階の状態にあり，相互作用はそれ



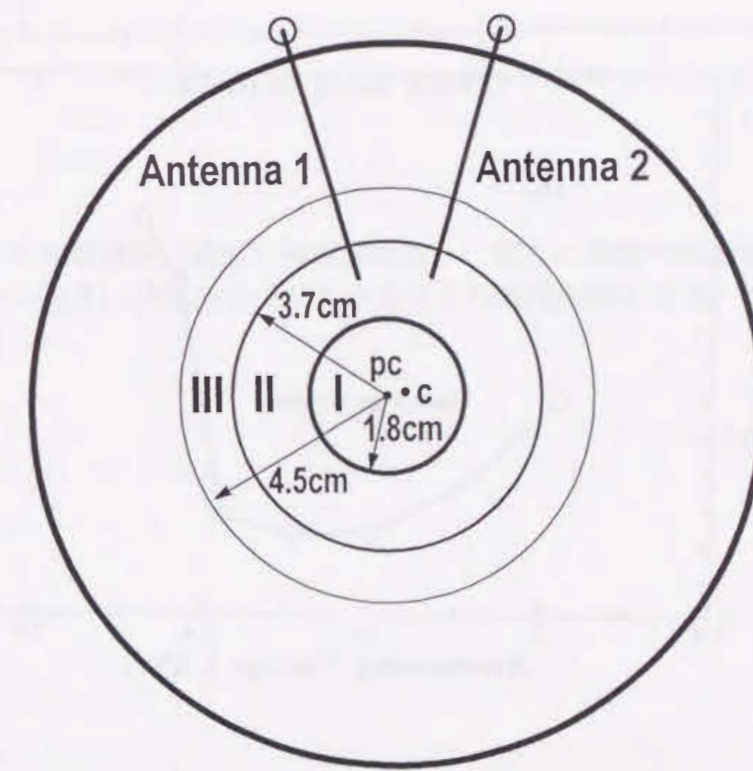
ほど強くない。A, B, C, D, Eはほぼ直線である磁界強度になると、真空容器内全体で波動が観測される。その中で、Cを除いた4本の直線は磁界が、コイル電流で2Aの間隔で、きれいに並んでおり、何らかの関連がありそうである。電子ビーム・プラズマ放電は磁界が弱くても強くても起き難いので、A, Eはビーム・プラズマ放電の原因になるとは思えない。Bも何らかの関連があるとするなら、やはり、その原因にはなれない。Fは磁界強度によりそのピーク位置を変える奇妙なもので、磁界を強くすると、電子ビーム側からコレクタ電極側に連続的に移動する。Cは直線であるが、他の直線とはその間隔が合わず、独立しているようである。マークされていないところは、波動がない、ないしは、弱すぎて観測されない。低ガス圧力にして相互作用を小さくした非線形性の少ない状況で、この特性をどう説明すればよいだろうか。

電子ビームの様子は、ビューイングポートから見ることができ、また、コレクタ電極に与える衝撃も、真空容器内にミラーを挿入して、その状況を観測できる。これをもとに、これらの事実を、簡単に、矛盾なく説明するために、電子ビームとプラズマの形状・配置が図3.25(a)のようになっていると考えよう。まず、電子ビームは、電子ビーム入り口から注入された後に、円錐状に広がりながら、かつ磁界の影響で進行方向に回転（右回転）しながら進み、コレクタ電極に到達する。コレクタ電極の観測では、電子ビームは円形に衝突しているが、ところどころ強烈な光を放つスポットがある。また、コレクタ電極を取り出して調べると、図3.25(b)のように、プラズマの中心(pc)とコレクタ電極の中心(c)とが少しずれていることがわかる。その理由は磁界のずれと考えられる。このことから、アンテナとプラズマの軸が完全な平行になっていない可能性が高い。

以上の考えから、図3.24の特性を解釈してみよう。コレクタ電極のスポット部の高熱により発生したプラズマは、磁界に捕らえられて、プラズマ密度の濃い細い円柱状として真空容器内に広がる。この細い円柱は、磁界強度の変化によりスポットが回転するのと同期して、真空容器軸の周りを回転する。その結果、この細いプラズマ円柱は磁界に比例して、アンテナに近づいたり遠ざかったりする。プラズマが近づけばアンテナ受信信号は大きくなる。A, B, D, Eが2Aの周期で位置によらず観測される理由である。次に、円錐状の電子ビームとアンテナは軸のずれがあると、アンテナを移動したとき、最接近する場所が存在する。そして、磁界強度が大きくなると電子ビーム円錐はしばむので、最接近点はコレクタ電極側に移動する。これがFの移動特性を説明する。最後に残るのがCである。これは電子ビーム・プラズマ放電の起きやすい磁界強度の範囲にあることから、プラズマと相互作用をして放電を引き起こす本来の波動と考えられる。したがって、波動振幅特性で得たデータについては、C以外による特性を抜き出して、解釈しなければならないだろう。なお、図3.25(b)に示すコレクタ電極にはプラズマの密度の違いによると思われる跡がくっきりと残っている。それは、半径1.8cm(I), 3.7cm(II), 4.5cm(III)の円で、それぞれ第一、第二、第三段階に対応していると考えられる。これらは標準的な実験パラメータによる各段階に於ける、おおよそのプラズマ半径であろう。



(a) 電子ビームとプラズマの形状



(b) コレクタ電極に残るプラズマ痕跡

図3.25: 実際の電子ビームとプラズマ



## 3.2.10 放電開始条件

第三段階に於ける波動調査については、周波数スペクトルの観測以外、ほとんどしていない。もちろん、この第三段階は電子ビーム・プラズマ放電そのもので、その機構解明をすべきであるが、それには非線形理論の確立と、これを検証する実験を行わなければならない。特に、周波数スペクトルと波動振幅の精度よい実験が鍵になる。このためには、繰り返しになるが、超高周波の測定装置が重要である。ただし、強い放電直前の状態であれば、その周波数スペクトルなどから、線形性が相当支配していると思われるので、少なくとも、第三段階に至るための放電開始条件については、T-Gモードの性質からわかるはずである。そこで図 3.26 に電子ビーム加速電圧（速度）に対するガス圧力、図 3.27 に電子ビーム加速電圧（速度）に対する磁界強度がどうあれば、放電が開始するか実験的に調べた条件を示しておこう。これによると、一般に、ガス圧力は大きいほど放電しやすいが、電子ビーム速度と磁界強度については放電に適する範囲があり、その値が大き過ぎても小さ過ぎてもいけない。この理由については後に検討しよう。

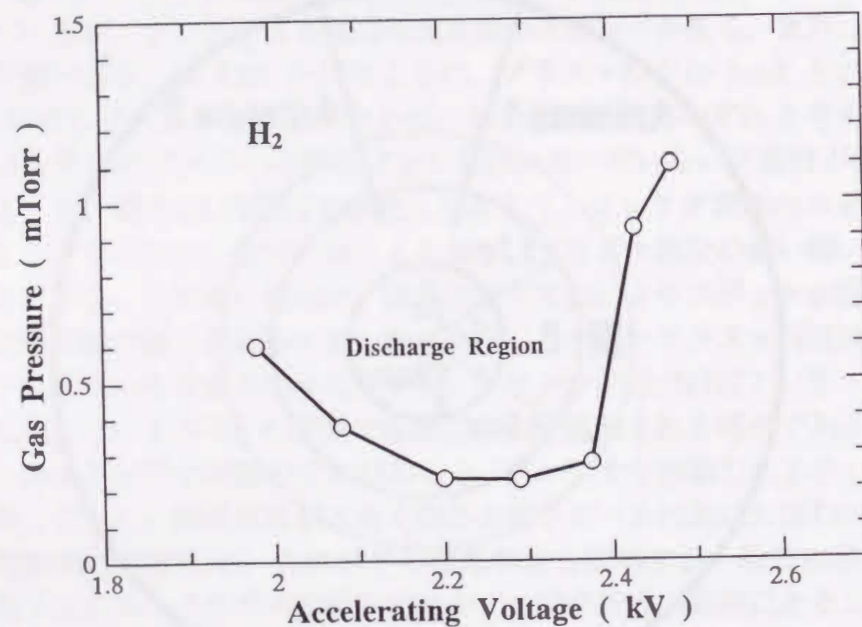


図 3.26: 電子ビーム加速電圧（速度）対ガス圧力 ガス圧力が高いほど放電しやすい。ガス圧力が一定なら放電に適する電子ビーム速度がある。ここで、磁界強度と電子ビーム電流は一定にしてある。

## 3.2. 実験結果

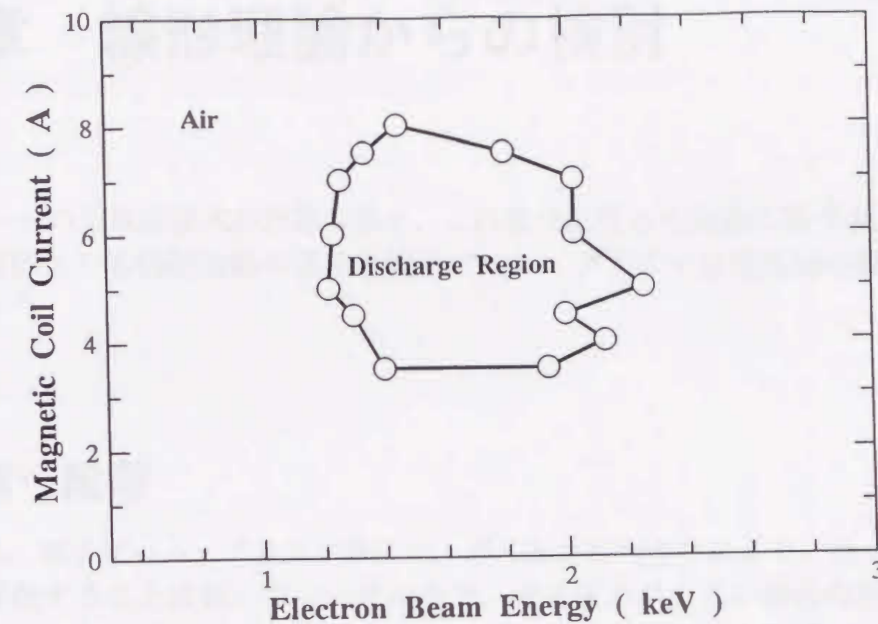


図 3.27: 電子ビーム加速電圧（速度）対磁界強度 閉じた曲線内が放電領域である。磁界強度、電子ビーム速度は共に大きくても小さくても放電困難である。ここで、ガス圧力は一定にしてある。



## 第4章 線形理論からの検討

T-Gモードの分散関係式の計算結果と、これまでに行った実験に基づき、電子ビーム・プラズマ系に生じる励起波動の正体と電子ビーム・プラズマ放電開始の機構を提案しよう。

### 4.1 第一段階

実験から、電子ビーム・プラズマ系には、ガス圧力の大きさにより、全く異なる三段階の状態が存在することは疑いない。その中で、ガス圧力が小さい場合の第一段階に於いて、図 3.5 (a) の周波数スペクトルを示す  $W_0$  は波長が  $20 \sim 30\text{cm}$  の定在波になっており、分散関係式の計算結果から得られる波動成長率の大きい A あるいは B 領域にあるモードの波長とは全く一致しない。計算パラメータを実験に合わせた計算によれば、A 領域のモードの波長が  $10\text{cm}$ 、B 領域は  $4\text{cm}$  程度であり、 $W_0$  を T-G モードとするのは無理である。また、電子ビームの存在する T-G モードの波動励起は、進行波管または後進波管の原理と似ており、電子ビームに沿ってわずか一波長程度の相互作用ではプラズマにエネルギーを与えることは考え難い。したがって、 $W_0$  は、電子ビームのないときの T-G モードのどれかが、進行管または後進波管の原理とは異なる機構で励起されたものとせざるを得ない。これについては、第二段階について議論した後の方がわかりやすいので、次の第二段階を先に説明してから、再び立ち返ることにしよう。

### 4.2 第二段階

次に、第二段階に於いて、図 3.5 (b) の周波数スペクトルを示すような、低ガス圧力のとき、ビーム・プラズマ系に現れる 2 つの励起波動  $W_1$ ,  $W_2$  を考察しよう。なお、以下では衝突効果については特に議論しないが、それでも励起波動についての実験結果をよく説明できるのは、第 2 章の衝突周波数の効果で述べたように、無損失プラズマで波動成長率が大きいものは、衝突効果があってもその成長率がやはり大きいからである。

さて、図 2.12 に於いて  $n = +1(A)$  のモードを  $W_1$ ,  $n = 0$ ,  $n = \pm 1 (B)$  のモードを  $W_2$  とするなら、周波数及び波長については直ちに説明できる。すなわち、2 つの波動の周波数と波長の計算値は実験とほぼ一致（ただし、 $W_2$  の波長については測定が困難なため確



認できない) し、W1がW2より周波数が低く、その周波数差がW2の周波数の数パーセントということも理解できる。次に、図2.13によると、低プラズマ密度では、S.S.C.W.に励起される右回り波 $n = +1$ (A)の成長率が最も大きく、このモードは、低ガス圧力のと きから現れるW1の性質に一致する。中プラズマ密度では、S.C.W.に励起される $n = 0$ ,  $n = \pm 1$ (B)の3つのモードの成長率が大きく、しかも、その大きさにさほどの違いはないので、どのモードが現れてもよい。したがって、この入り交じった3つのモードがW2の正体であろう。実際、既に述べたように、ガス圧力を高めたときに現れるW2には、すべての偏波が観測されている。

ここでW1, W2がバースト波となる理由を、図3.23のコレクタ電流と波動信号の図をもとに述べよう。まず最初に、電子ビームと薄いプラズマの相互作用により波動が励起される。しかし、この励起された波動の電界強度があるしきい値を越えるまでの一定期間は電離が起こらず、そのため、パラメータ変動はほとんどなく波動振幅は急激に増大する。この間、プラズマ密度はほとんど増加しない。その後、波動の電界強度がしきい値を超えて大きくなると電離が開始され、プラズマ密度が急上昇するが、このときにパラメータ変動が起き、波動成長は停止する。それと共に電離その他のために波動自身がエネルギーを失い、その振幅は逆に減少する。振幅の減少はプラズマ密度の増加を抑え、やがて波動の電界強度がしきい値以下になると、プラズマ密度はもはや増えず最高となり、その後、プラズマ密度は、粒子衝突あるいは拡散によってある時定数で減少に転ずる。この減少時には、パラメータ変動がある限り、プラズマ密度増加のときと同様に波動は成長しない。しかし、プラズマ密度が十分減少し、パラメータ変動のない状態になると、再び波動が励起される。この一連の繰り返りでバースト波が形成される。プラズマ密度を急激に増加させようとしても、パラメータ変動のために、波動が成長できず逆に減少してしまうなら、プラズマ密度は一定の値に押さえられるはずである。実際、図3.10に於いてW1及びW2の周波数がほぼ一定となっているのは、これが理由であろう。

ところで、プラズマ密度の違いによりW1, W2のいずれかが現れるなら、ガス圧力が一定のとき、なぜ図3.5(b)のようにW1, W2のスペクトルが同時に観測されるのだろうか。この答えは、実際にはガス圧力が一定に保たれず、バースト波の間欠によって高速に変化することにある。いまプラズマ密度が低く、W1のバースト波が存在していたとする。この状態からガス圧力を高めれば、W1による電離が増大し、プラズマ密度も増加する。すると、図2.13が示すように成長率の大きいW2がW1に代わって現れる。W2による電離作用はプラズマ密度をさらに増加させ、そのプラズマは外部磁界に捕らえられる。その結果、真空容器の実質容積が減り、W2のバースト波が続く限り、常時稼動している拡散ポンプがガス圧力を徐々に低め、それと共にプラズマ密度を低下させる。すると、W2の成長率がW1より下がり、W2に代わって再びW1が現れる。半径方向の電位ポテンシャル変化( $0 < r < a$ ではベッセル関数)を考えれば、W2の $n = 0$ モードが円筒プラズマの外側で電界強度大であるのに対し、W1は $n = +1$ モードであってその電界強度は外側で小、内側で大となる。このため、W1による電離領域は内側に狭められ、その結果、真空容器の実質容積の増加となり、ガス圧力が高まる。この一連が繰り返される。ガス圧力の変動は、図3.23のコレクタ電流 $I_c$ の変化にきれいに現れている。

以上、第二段階に於ける励起波動W1, W2はT-Gモードとして実験と全く矛盾なく説

明できる。

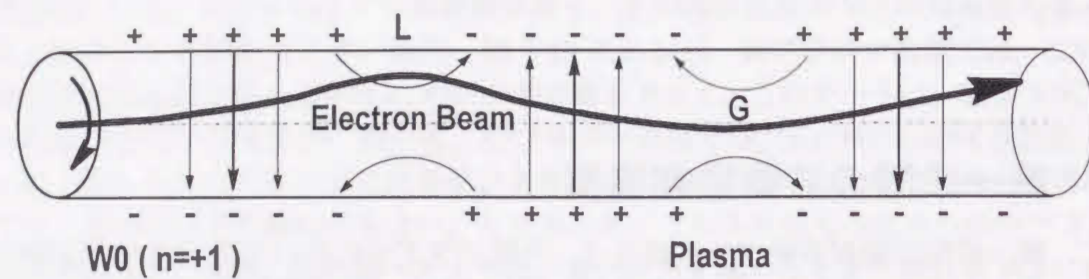
### 4.3 第一段階の波動励起機構

さて、第一段階の励起波動W0に戻ろう。円筒プラズマに於いてT-Gモード以外の振動形態にW0の由来を求めるのは適当でない。なぜなら、分散関係式を導く仮定の中に、適切でないものは見当たらないし、このモードが現実と合わないとする、第二段階の議論は根拠を失う。それよりも、W0の波長からすると、電子ビームとプラズマは一波長程度で相互作用しなければならず、これでは進行管のような励起機構を原理とするには無理(第二段階では測定された波長からすると数波長程度以上の相互作用長を持ち、問題はないと思われる)があり、波動励起は理解できない。そこで、どうしても一波長程度で効率よく電子ビームと相互作用する機構を考えねばならない。図4.1はこれに対する原理の提案である。T-Gモードの計算結果である図2.13によれば、低ガス圧力、すなわちプラズマ密度が小さいときは、 $n = +1$ (A)モードの成長率が高い。そこで、W0は $n = +1$ モードの定在波としよう。W0が右回りの定在波であることは既に実験結果に述べた通りである。すると、その電界の様子は図4.1のようなものになる。左から注入された電子ビームは、下向き電界により上に曲げられて進み、Lのところで減速電界に会い波動にエネルギーを与える。それを通り過ぎると、上向きの電界に会い、今度は下に曲げられながら進行する。そして、Gの所が減速電界であれば、さらに波動にエネルギーを与えるが、減速電界だとしてもその大きさはGより小さいので、Lで与えたエネルギーはGですべて回収できず、その差は波動成長に使われる。このことは、電子ビームの中心にある電子だけでなく、すべての電子を考慮しても、同じになるであろう。これがW0の励起原理である。なお、正確には、いま述べた電子ビームの運動と定在波が、磁界によって電子サイクロトロン周波数程度(高域混成波だが、プラズマ密度が小さいのでこの周波数になる)で回転する。つまり、電子ビームはらせん運動をし、プラズマの定在波( $n = +1$ モード)は、たとえていうなら、電界の様子が二人で回す縄跳びの縄状になっている。これら電子ビームとプラズマ定在波の同期は、制約がほとんどないので容易なはずで、波動は電子ビームからエネルギーを効率よく得ることができる。定在波でなければ、電子ビームは減速電界を効率的に利用できないので、W0が定在波である理由もここに見出せる。もちろん、コレクタ電極と真空容器壁の働きで反射波があり、これが定在波を生じさせているのである。W0がバースト波となる機構は、第二段階のW1, W2について述べたものと同じであろう。

### 4.4 第三段階

さて、いよいよ、第三段階の電子ビーム・プラズマ放電について検討しよう。ただし、この段階はその周波数スペクトルの広さや大きなヒステリシスの存在を考えれば、線形理論で議論するのは難しいと思われる。そこで、放電開始直前の状態にあり、電子ビーム・



図 4.1: 第一段階に現れる波動  $W_0$  の励起原理

プラズマ放電を引き起こす原因となる波動はT-Gモードのどれなのかを述べよう。図 2.13 の電子密度と波動成長率の関係によれば、プラズマの電子密度を高くすると、軸対称波  $n = 0$  (A) モードの成長率は他のものに比べて急激に大きくなり第二段階で波動成長率の大きかった  $W_1$ ,  $W_2$  にとって代わると考えられる。他に波動成長率の大きなものはないので、第三段階を引き起こす波動は、このモード以外にないだろう。

そこで、この波動モードの性質が、実験で調べた電子ビーム・プラズマ放電の開始条件を説明できるか検討してみよう。まず、図 3.26 のガス圧力が高いほど放電し易い点については、図 2.13 に於いて  $n = 0$  (A) モードの成長率がプラズマ電子密度の増加と共に大きくなることから明らかである。しかも、このとき図 2.14 からわかるように、波数  $K$  も大きくなるので、相互作用はますます強く（相互作用は単位長当りの波数が大きいほど強い）なる。電子ビーム速度を速くすると、図 2.16 に於いて、成長率が小さくなっている上に、電子ビーム電流を一定に保っていることにより、電子ビーム密度が低くなっている。図 2.18 から、さらに成長率は小さくなり、放電は困難になるといえる。電子ビーム速度を遅くすれば、相互作用は強くなるはずであるが、図では逆に放電が困難になっている。なぜかといえば、図 2.17 の電子ビーム加速電圧（速度）対波数  $K$  を見ると、電子ビーム速度が小さくなると、 $K$  が急激に大きくなる。 $K$  が大きい（波長が短い）と、温度や粒子間の相互作用のために、電子の集群作用が弱まる。これが成長率を小さくすると考えられる。ただし、本研究で用いた分散関係式は、温度や粒子間相互作用を衝突周波数として定数で与えているだけで、 $K$  の関数としていないので、このことは推測の域を出ない。ただ、温度の効果により、 $K$  が大きければ波動減衰（Landau 減衰）が大きくなることは、第2章 2.3.2 でプログラム試験用に計算した図 2.5 の分散関係によく表われている。

次に、図 3.27 の磁界強度が大きくなれば、放電困難となる理由は何であろうか。それは図 2.13 の電子密度対波動成長率の特性にある。この図に於いて、電子密度を示す電子プラズマ周波数は、電子サイクロトロン周波数で規格化されている。したがって、電子密度が一定なら磁界を、すなわち電子サイクロトロン周波数を高くすると、図の規格化された電子プラズマ密度は小さくなり、成長率は下がる。これが磁界強度が大きくなると放電困難となる理由である。磁界を小さくすると、成長率は大きくなるが、プラズマの閉じ込めができなくなり、その結果、電子密度が下がり、放電が困難となるのであろう。

こうして、電子ビーム・プラズマ放電を開始させる波動モードとして、軸対称波  $n = 0$  (A) であると仮定するなら、ほとんどすべて矛盾なく説明できる。図 2.13 の電子密度対

成長率によれば、このモードの成長率はプラズマ密度を高めると、他のモードに比べて、急激に増大する。しかも、このモードに対応する分散関係式の解は取りこぼしの少ないきわめて安定なものである。それゆえ、このモードは、ビーム・プラズマ放電を開始させる非線形波動の種として十分な性質を持つといえよう。



## 第5章 電子ビーム・プラズマ系の非線形相互作用

### 5.1 Vlasov-Poisson 系

第二段階の終わりから第三段階になると、電子ビーム・プラズマ系に励起される波動は、非線形性が現れて来ると思われる。これまで述べたように、第二段階でもそれが浅い間は線形理論で大方は議論できるが、非線形性を考慮した議論も必要なことであろう。そこで、プラズマの境界条件を入れるような細かいことはできないが、波動がバースト波になることやイオン波が高域混成波に与える効果について非線形理論を用いて説明したい。

まず、プラズマ非線形波動を解析するための基礎方程式として、(5.1) 式の Vlasov 方程式と (5.2) 式の Poisson 方程式を出発点とする。

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{\epsilon_0} \int f_\alpha d\mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{E}_{ext} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi, \quad \mathbf{B} = -\nabla \Psi \quad (5.3)$$

ここで、 $e_\alpha$ ,  $m_\alpha$ ,  $f_\alpha$  は、それぞれ、粒子  $\alpha$  の電荷、質量、分布関数、 $\mathbf{v}$  は速度空間座標、 $\mathbf{E}$  は電界、 $\mathbf{E}_{ext}$  は外部からの電界で、 $\mathbf{B}$  は磁界、 $\epsilon_0$  は真空誘電率である。

さて、非線形性の解析には、少なくとも二次までの近似解を求めなければならない。しかも、実験と比較検討をするには二次元の解析をしておきたい。しかし、磁界中のプラズマのような二次元問題は、一次元 [16] に比べ、その計算が極端に複雑になる。これまで、適当な漸近展開と重要な電界の無視により、本質を損なわず二次近似解を得て、解析の基礎としてきた [51]。

しかし、非線形現象の出発点とするために、こうした単純化をしない解を求めておくことが必要と考え、(a) 弱電界項を無視しない、(b) 級数展開は可能な限りしない、(c) プラズマ分散関数は基礎式に残す、という方針で計算を行うことにする。ポテンシャルと分布関数を求めるには、非線形である Vlasov 方程式と Poisson 方程式を連立させて解けばよい。この解法として、ここでは、図 5.1 に示す逐次近似法を用いる。 $\Phi_{ex}$  はプラズマ外部から印加するポテンシャル、 $f_{\alpha 0}$  は零次近似（波動なしとする近似）で Maxwell 分布、 $\Phi_0$  は零次近似のポテンシャルで 0 である。粒子  $\alpha$  の分布関数  $f_\alpha$ 、ポテンシャル  $\Phi$  は、零次近似に高次の近似を加え、(5.4) 式、(5.5) 式のようになる。ただし、計算は積分変換し



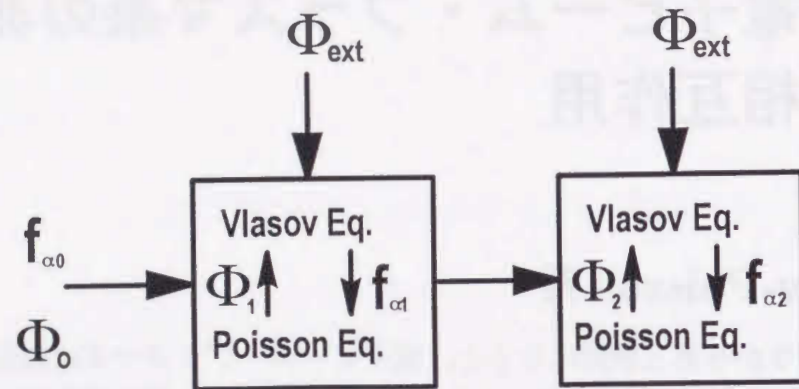


図 5.1: Vlasov-Poisson 系の逐次近似解法

た方程式系で進め、後で逆変換をする。

$$f_\alpha = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1} + f_{\alpha 2} + \dots \quad (5.4)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots \quad (5.5)$$

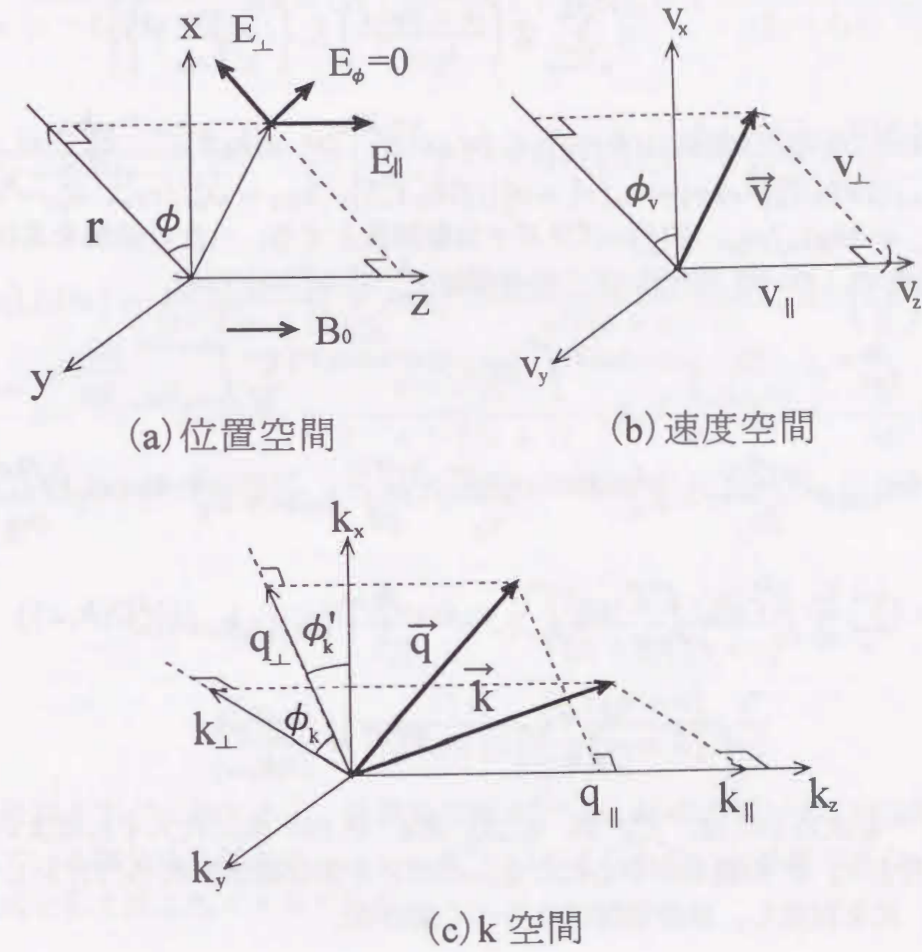
プラズマが磁界方向に軸対称であるとき、Vlasov 方程式は位置空間  $(r, \phi, z)$ 、速度空間  $(v_\perp, \phi_v, v_\parallel)$  をそれぞれ円柱座標系で扱い、これを時間  $t$  について Laplace 変換  $(\int_0^\infty f e^{i\omega t} dt)$ 、軸方向  $z$  について Fourier 変換  $(\int_{-\infty}^\infty f e^{ik_\parallel z} dz)$ 、軸に垂直方向  $r$  について Hankel 変換  $(\int_0^\infty r J_0(k_\perp r) dr)$  すれば (5.6) 式となる。ここで、 $\mathbf{k}$  空間は  $(k_\perp, \phi_k, k_\parallel)$ 、 $E_\perp$ 、 $E_\parallel$  は各電界成分、 $\omega_{c\alpha}$  はサイクロトロン角周波数、 $\theta = \phi_v - \phi$  である。また、 $\sum_q$  は Faltung の定理の積分和で直交座標のものとは異なり、(5.7) 式で定義される。なお、図 5.2 に位置、速度および  $\mathbf{k}$  の各空間を示す。

$$i(k_\parallel v_\parallel + k_\perp v_\perp \cos \theta - \omega) f_\alpha^{\mathbf{k}, \omega} - \omega_{c\alpha} \frac{\partial f_\alpha^{\mathbf{k}, \omega}}{\partial \theta} = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \sum_q \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} \frac{d\omega_1}{2\pi} \times$$

$$\left\{ E_\perp^{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \omega-\omega_1} \cos \theta \frac{\partial f_\alpha^{\mathbf{q}, \omega_1}}{\partial v_\perp} - E_\perp^{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \omega-\omega_1} \frac{\sin \theta}{v_\perp} \frac{\partial f_\alpha^{\mathbf{q}, \omega_1}}{\partial \theta} + E_\parallel^{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \omega-\omega_1} \frac{\partial f_\alpha^{\mathbf{q}, \omega_1}}{\partial v_\parallel} \right\} \quad (5.6)$$

$$\sum_q A^{\mathbf{k}-\mathbf{q}} B^{\mathbf{q}} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi'_k \int_{-\infty}^{+\infty} dv_\parallel \int_0^{+\infty} v_\perp dv_\perp A \{ k_\parallel - q_\parallel, \sqrt{k_\perp^2 + q_\perp^2 - 2k_\perp q_\perp \cos(\phi_k - \phi'_k)} \} B(q_\parallel, q_\perp) \quad (5.7)$$

図 5.2: 位置、速度および  $\mathbf{k}$  空間

次に、Poisson 方程式についても同様な積分変換をし、 $k^2 = k_\perp^2 + k_\parallel^2$  と置けば (5.8) 式になる。 $\sum_\alpha$  はすべての粒子についての和を意味する。

$$k^2 \Phi^{\mathbf{k}, \omega} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi_v \int_{-\infty}^{+\infty} dv_\parallel \int_0^{+\infty} v_\perp dv_\perp f_\alpha^{\mathbf{k}, \omega} + k^2 \Phi_{ext}^{\mathbf{k}, \omega} \quad (5.8)$$

(5.6) 式の右辺に零次近似解を代入すると、1 階の微分方程式となり、その解は簡単に得られる。これを (5.8) 式と連立させれば、分布関数とポテンシャルの一次近似解  $f_{\alpha 1}^{\mathbf{k}, \omega}$ 、 $\Phi_1^{\mathbf{k}, \omega}$  が (5.9) 式、(5.10) 式のように求まる。 $D(\mathbf{k}, \omega)$  は (5.11) 式である。

$$f_{\alpha 1}^{\mathbf{k}, \omega} = e^{ia\theta + ib \sin \theta} \int_0^\theta d\theta' e^{-(ia\theta' + ib \sin \theta')} \frac{e_\alpha}{m_\alpha \omega_{c\alpha}} \left\{ E_\perp^{\mathbf{k}, \omega} \cos \theta' \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp} + E_\parallel^{\mathbf{k}, \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel} \right\} \quad (5.9)$$

$$\Phi_1^{\mathbf{k}, \omega} = \Phi_{ext}^{\mathbf{k}, \omega} / D(\mathbf{k}, \omega) \quad (5.10)$$



$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{2k_{D\alpha}^2}{k^2} \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{T\alpha}} \right) \exp \left\{ - \left( \frac{k_{\perp} v_{T\alpha}}{\sqrt{2} \omega_{c\alpha}} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z \left( \frac{\omega - n \omega_{c\alpha}}{k_{\parallel} v_{T\alpha}} \right) I_n \left\{ \left( \frac{k_{\perp} v_{T\alpha}}{\sqrt{2} \omega_{c\alpha}} \right)^2 \right\} \right] \quad (5.11)$$

ここで,  $a = (k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) / \omega_{c\alpha}$ ,  $b = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{c\alpha}$ ,  $E_{\perp}^{\mathbf{k}, \omega} = -ik_{\perp} \Phi_{\alpha 1}^{\mathbf{k}, \omega}$ ,  $E_{\parallel}^{\mathbf{k}, \omega} = -ik_{\parallel} \Phi_{\alpha 1}^{\mathbf{k}, \omega}$ ,  $f_{\alpha 0} = n_{\alpha 0} m_{\alpha} / (2\pi k_B T_{\alpha})^{\frac{3}{2}} \exp \{ -m_{\alpha} (v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2) / (2k_B T_{\alpha}) \}$ ,  $k_{D\alpha} = \omega_{p\alpha} / v_{T\alpha}$ ,  $\omega_{p\alpha}$  = プラズマ角周波数,  $v_{T\alpha}^2 = 2k_B T_{\alpha} / m_{\alpha}$ ,  $Z(\xi)$  = プラズマ分散関数とする。一次近似解を基にさらに近似を進めれば, (5.12) 式, (5.13) 式二次近似解  $f_{\alpha 2}^{\mathbf{k}, \omega}$ ,  $\Phi_2^{\mathbf{k}, \omega}$  となる。

$$f_{\alpha 2}^{\mathbf{k}, \omega} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} \omega_{c\alpha}} e^{ia\theta + ib \sin \theta} \int^{\theta} d\theta'' e^{-(ia\theta'' + ib \sin \theta'')} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty + i\sigma}^{+\infty + i\sigma} \frac{d\omega_1}{2\pi} \times$$

$$\{ E_{\perp}^{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \omega-\omega_1} \cos \theta'' \frac{\partial f_{\alpha}^{\mathbf{q}, \omega_1}}{\partial v_{\perp}} - E_{\perp}^{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \omega-\omega_1} \frac{\sin \theta''}{v_{\perp}} \left( \frac{\partial f_{\alpha}^{\mathbf{q}, \omega_1}}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta''} + E_{\parallel}^{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \omega-\omega_1} \left( \frac{\partial f_{\alpha}^{\mathbf{q}, \omega_1}}{\partial v_{\parallel}} \right)_{\theta=\theta''} \} \quad (5.12)$$

$$\Phi_2^{\mathbf{k}, \omega} = \{ \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi_v \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \int_0^{+\infty} v_{\perp} dv_{\perp} f_{\alpha 2}^{\mathbf{k}, \omega} \}_{\Phi_2^{\mathbf{k}, \omega} = \Phi_1^{\mathbf{k}, \omega} / \{ k^2 D(\mathbf{k}, \omega) \}} \quad (5.13)$$

ここで,

$$E_{\perp}^{\mathbf{k}, \omega} = \frac{ik_{\perp} \Phi_{exp}}{D(\mathbf{k}, \omega)} \quad E_{\parallel}^{\mathbf{k}, \omega} = \frac{ik_{\parallel} \Phi_{exp}}{D(\mathbf{k}, \omega)} \quad (5.14)$$

とする。 $\Phi_2^{\mathbf{k}, \omega}$  を求めるには,  $f_{\alpha 2}^{\mathbf{k}, \omega}$  は (5.13) 式を (5.14) 式に代入すればよいが, これらは速度微分と  $\theta'$ ,  $\theta''$  の積分が中心になる。このとき主な数学公式 [5, 71] として, (5.15) 式 ~ (5.24) 式を利用し, 級数展開はなるべく避ける。

$$e^{ib \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(b) e^{in\theta} \quad (5.15)$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta + ib \sin \theta} = 2\pi J_n(-b) \quad (5.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{z - \xi} dz = \sqrt{\pi} Z(\xi) \quad (5.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{(z - \xi_1)(z - \xi_2)} dz = \sqrt{\pi} \left\{ \frac{Z(\xi_1)}{\xi_1 - \xi_2} + \frac{Z(\xi_2)}{\xi_2 - \xi_1} \right\} \quad (5.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{-z^2}}{(z - \xi_1)(z - \xi_2)} dz = \sqrt{\pi} \left\{ \frac{\xi_1 Z(\xi_1)}{\xi_1 - \xi_2} + \frac{\xi_2 Z(\xi_2)}{\xi_2 - \xi_1} \right\} \quad (5.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 e^{-z^2}}{(z - \xi_1)(z - \xi_2)} dz = \sqrt{\pi} \left\{ 1 + \frac{\xi_1^2 Z(\xi_1)}{\xi_1 - \xi_2} + \frac{\xi_2^2 Z(\xi_2)}{\xi_2 - \xi_1} \right\} \quad (5.20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{(z - \xi_1)^2(z - \xi_2)} dz = \sqrt{\pi} \left[ \frac{2}{\xi_2 - \xi_1} \{ 1 + \xi_1 Z(\xi_1) \} + \frac{Z(\xi_2) - Z(\xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)^2} \right] \quad (5.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{-z^2}}{(z - \xi_1)^2(z - \xi_2)} dz = \sqrt{\pi} \left[ \frac{2\xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \{ 1 + \xi_1 Z(\xi_1) \} + \frac{\xi_2 \{ Z(\xi_2) - Z(\xi_1) \}}{(\xi_2 - \xi_1)^2} \right] \quad (5.22)$$

$$J_{\mu}(az) J_{\nu}(bz) = \frac{(az)^{\mu} (bz)^{\nu}}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{G_n(-\mu-2n, \nu+1, b^2/a^2)}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \cdot \left( \frac{az}{2} \right)^{2n} \quad (5.23)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 z^2} z^{\mu-1} J_{\nu}(bz) dz = \frac{\Gamma(\frac{\mu+\nu}{2}) b^{\nu}}{2^{\nu+1} a^{\mu+\nu} \Gamma(\nu+1)} \cdot {}_1F_1 \left( \frac{\mu+\nu}{2}; \nu+1; -\frac{b^2}{4a^2} \right) \quad (5.24)$$

ここで,  $G_n$  は Jacobi の多項式,  ${}_1F_1$  は Kummer の関数で (5.25) 式, (5.26) 式で定義される。

$$G_n(\alpha, \gamma; x) = 1 + \sum_{r=1}^n (-1)^r C_r \frac{\Gamma(\alpha+n+r) \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\gamma+r)} \cdot x^r \quad (5.25)$$

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \cdot \frac{z^n}{n!} \quad (5.26)$$

以上の計算をすべて終わると, 最終的な解  $\Phi_2^{\mathbf{k}, \omega}$  は, かなり長い式, (5.27) 式となる。まだ残っている積分は外部ポテンシャル  $\Phi_{ext}^{\mathbf{k}, \omega}$  が与えられないと計算できないが, 二次近似の基礎式としてはこれで十分である。

$$\Phi_2^{\mathbf{k}, \omega} = \sum_{\alpha} \frac{2e_{\alpha}^3 n_{\alpha 0} V_{T\alpha}^{-5}}{\epsilon_0 m_{\alpha}^2 k^2 D(\mathbf{k}, \omega)} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty + i\sigma}^{+\infty + i\sigma} \frac{d\omega_1}{2\pi} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \\ (-1)^l \frac{G_l \{ -n-2l, m+1; (k_{\perp} - q_{\perp})^2 / q_{\perp}^2 \}}{2^{n+m} \Gamma(m+1) l! \Gamma(n+l+1)} \cdot \left( \frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right)^{m+n} V_{T\alpha}^{2(m+n+l)} \cdot \left( \frac{q_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right)^{2l+n} \left( \frac{k_{\perp} - q_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right)^m \\ \times \left[ -\frac{1}{4} E_{\perp}^{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \omega-\omega_1} E_{\perp}^{\mathbf{q}, \omega_1} \left( \frac{q_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right) \right. \\ \times \left[ \frac{\Gamma(n+m+l) \left( \frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right)^{-3} V_{T\alpha}^0 F_1(n+m+l; m+n-2; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2})}{2^{-2} \Gamma(m+n-2) k_{\parallel} \{ \omega_1 - (n-2)\omega_{c\alpha} \} - q_{\parallel} \{ \omega - (m+n-3)\omega_{c\alpha} \}} \right. \\ \cdot \left\{ Z \left( \frac{\omega_1 - (n-2)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} q_{\parallel}} \right) - Z \left( \frac{\omega - (m+n-3)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} k_{\parallel}} \right) \right\} \\ \left. + \frac{\Gamma(n+m+l+1) \left( \frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right)^{-1} V_{T\alpha}^2 F_1(n+m+l+1; m+n; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2})}{2^0 \Gamma(m+n) k_{\parallel} \{ \omega_1 - (n-2)\omega_{c\alpha} \} - q_{\parallel} \{ \omega - (m+n-1)\omega_{c\alpha} \}} \right] \quad (5.27)$$







$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(n+m+l+2)(\frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}})^2 V_{T\alpha}^4 F_1(n+m+l+2; m+n+3; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2})}{2^3 \Gamma(m+n+3) k_{\parallel} \{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel} \{\omega - (m+n+2)\omega_{c\alpha}\}} \\
& \cdot \left\{ \left( \frac{q_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}} \cdot \frac{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} - \frac{\omega_1}{\omega_{c\alpha}} \right) Z \left( \frac{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} q_{\parallel}} \right) - \right. \\
& \left. \left( \frac{q_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}} \cdot \frac{\omega_1 - (m+n+2)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} - \frac{\omega_1}{\omega_{c\alpha}} \right) Z \left( \frac{\omega - (m+n+2)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} k_{\parallel}} \right) \right\} \\
& - \frac{1}{2} E_{\perp}^{k-q, \omega-\omega_1} E_{\perp}^{q, \omega_1} \left( \frac{q_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right) \times \\
& \left[ \frac{\Gamma(n+m+l)(\frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}})^{-2} V_{T\alpha}^0 F_1(n+m+l; m+n-1; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2})}{2^{-1} \Gamma(m+n-1) k_{\parallel} \{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel} \{\omega - (m+n-2)\omega_{c\alpha}\}} \right. \\
& \cdot \left\{ \frac{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} Z \left( \frac{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} q_{\parallel}} \right) - \right. \\
& \left. \frac{\omega_1 - (m+n-2)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} Z \left( \frac{\omega - (m+n-2)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} k_{\parallel}} \right) \right\} \\
& + \frac{\Gamma(n+m+l+1)(\frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}})^0 V_{T\alpha}^2 F_1(n+m+l+1; m+n+1; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2})}{2^1 \Gamma(m+n+1) k_{\parallel} \{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel} \{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}\}} \\
& \cdot \left\{ \frac{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} Z \left( \frac{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} q_{\parallel}} \right) - \right. \\
& \left. \frac{\omega_1 - (m+n)\omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}} Z \left( \frac{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} k_{\parallel}} \right) \right\} \\
& - \frac{\Gamma(n+m+l+1)(\frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}})^0 V_{T\alpha}^2 F_1(n+m+l+1; m+n-1; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2})}{2^1 \Gamma(m+n+1) k_{\parallel} \{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel} \{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}\}} \\
& \cdot \left\{ \frac{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} Z \left( \frac{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} q_{\parallel}} \right) - \right. \\
& \left. \left( \frac{\omega_1 - (m+n)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} \right) Z \left( \frac{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} k_{\parallel}} \right) \right\} \\
& - \frac{\Gamma(n+m+l+2)(\frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}})^2 V_{T\alpha}^4 F_1(n+m+l+2; m+n+3; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2})}{2^3 \Gamma(m+n+3) k_{\parallel} \{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel} \{\omega - (m+n+2)\omega_{c\alpha}\}} \\
& \cdot \left\{ \frac{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} Z \left( \frac{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} q_{\parallel}} \right) - \right. \\
& \left. \frac{\omega_1 - (m+n+2)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} Z \left( \frac{\omega - (m+n+2)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} k_{\parallel}} \right) \right\} \\
& - 2 E_{\perp}^{k-q, \omega-\omega_1} E_{\parallel}^{q, \omega_1} V_{T\alpha}^{-2} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left\{ \frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} Z \left( \frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} q_{\parallel}} \right) - \right. \\
& \left. \frac{\omega_1 - (m+n-1)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} Z \left( \frac{\omega - (m+n-1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} k_{\parallel}} \right) \right\} \\
& + \frac{\Gamma(n+m+l+2)(\frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}})^1 V_{T\alpha}^4 F_1(n+m+l+2; m+n+2; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2})}{2^2 \Gamma(m+n+2) k_{\parallel} \{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel} \{\omega - (m+n+1)\omega_{c\alpha}\}} \\
& \cdot \left\{ \frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} Z \left( \frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} q_{\parallel}} \right) - \right. \\
& \left. \frac{\omega_1 - (m+n+1)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} Z \left( \frac{\omega - (m+n+1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} k_{\parallel}} \right) \right\} \\
& - E_{\perp}^{k-q, \omega-\omega_1} E_{\parallel}^{q, \omega_1} \times \\
& \left[ \frac{\Gamma(m+n+l)}{2^0 \Gamma(m+n)} \cdot \left( \frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right)^{-1} \cdot V_{T\alpha}^0 \cdot {}_1F_1(n+m+l; m+n; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2}) \cdot \left\{ \frac{V_{T\alpha}}{(\frac{k_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}})} - \right. \right. \\
& \left. \frac{1}{k_{\parallel}(\omega_1 - n\omega_{c\alpha}) - a_{\parallel}(\omega - (m+n-1)\omega_{c\alpha})} \times \right. \\
& \left. \left\{ \left( \frac{q_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}} \left( \frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}} \right)^2 - \frac{\omega_1}{\omega_{c\alpha}} \left( \frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} \right) \right) Z \left( \frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} q_{\parallel}} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left( \frac{q_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}} \left( \frac{\omega - (m+n-1)\omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}} \right)^2 - \frac{\omega_1}{\omega_{c\alpha}} \left( \frac{\omega - (m+n-1)\omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}} \right) \right) Z \left( \frac{\omega - (m+n-1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} k_{\parallel}} \right) \right\} \\
& \left. - \frac{\Gamma(n+m+l+1)}{2^2 \Gamma(n+m+2)} \cdot \left( \frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right)^{+1} \cdot V_{T\alpha}^2 \cdot {}_1F_1(n+m+l+1; m+n+2; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2}) \cdot \left\{ \frac{V_{T\alpha}}{(\frac{k_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}})} - \right. \right. \\
& \left. \frac{1}{k_{\parallel}(\omega_1 - n\omega_{c\alpha}) - a_{\parallel}(\omega - (m+n+1)\omega_{c\alpha})} \times \right. \\
& \left. \left\{ \left( \frac{q_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}} \left( \frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}} \right)^2 - \frac{\omega_1}{\omega_{c\alpha}} \left( \frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} \right) \right) Z \left( \frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} q_{\parallel}} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left( \frac{q_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}} \left( \frac{\omega - (m+n+1)\omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}} \right)^2 - \frac{\omega_1}{\omega_{c\alpha}} \left( \frac{\omega - (m+n+1)\omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}} \right) \right) Z \left( \frac{\omega - (m+n+1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha} k_{\parallel}} \right) \right\} \right. \\
& \left. \right\} + E_{\parallel}^{k-q, \omega-\omega_1} E_{\perp}^{q, \omega_1} \left( \frac{q_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}} \right) \times \\
& \left[ \frac{\Gamma(m+n+l+1)}{2^0 \Gamma(m+n)} \cdot \left( \frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right)^{-1} \cdot V_{T\alpha}^2 \cdot {}_1F_1(n+m+l+1; m+n; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2}) \right. \\
& \times \left[ \frac{1}{(\frac{q_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}})} \cdot \frac{2/V_{T\alpha}}{k_{\parallel} \{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel} \{\omega - (m+n-1)\omega_{c\alpha}\}} \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times \left[ \frac{1}{\left(\frac{q_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}}\right)} \cdot \frac{2/V_{T\alpha}}{k_{\parallel}\{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel}\{\omega - (m+n-1)\omega_{c\alpha}\}} \right. \\
& \quad \cdot \left\{ 1 + \frac{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}} Z\left(\frac{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}}\right) \right\} + \\
& \quad \frac{k_{\parallel}\omega_{c\alpha}}{[k_{\parallel}\{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel}\{\omega - (m+n-1)\omega_{c\alpha}\}]^2} \times \\
& \quad \left. \left\{ Z\left(\frac{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}}\right) - Z\left(\frac{\omega_1 - (m+n-1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}}\right) \right\} \right] \\
& + \frac{\Gamma(m+n+l+2)}{2^2\Gamma(m+n+2)} \cdot \left(\frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}}\right)^{+1} \cdot V_{T\alpha}^4 \cdot {}_1F_1(n+m+l+2; m+n+2; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2}) \\
& \times \left[ \frac{1}{\left(\frac{q_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}}\right)} \cdot \frac{2/V_{T\alpha}}{k_{\parallel}\{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel}\{\omega - (m+n+1)\omega_{c\alpha}\}} \right. \\
& \quad \cdot \left\{ 1 + \frac{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}} Z\left(\frac{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}}\right) \right\} + \\
& \quad \frac{k_{\parallel}\omega_{c\alpha}}{[k_{\parallel}\{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel}\{\omega - (m+n+1)\omega_{c\alpha}\}]^2} \times \\
& \quad \left. \left\{ Z\left(\frac{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}}\right) - Z\left(\frac{\omega_1 - (m+n+1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}}\right) \right\} \right] \\
& - 2E_{\parallel}^{\mathbf{k}-q, \omega-\omega_1} E_{\perp}^{\mathbf{q}, \omega_1} V_{T\alpha}^{-2} \times \\
& \left[ \frac{\Gamma(m+n+l+1)}{2^0\Gamma(m+n)} \cdot \left(\frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}}\right)^{-1} \cdot V_{T\alpha}^2 \cdot {}_1F_1(n+m+l+1; m+n; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2}) \times \right. \\
& \quad \left. \left\{ \frac{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} Z\left(\frac{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}}\right) - \frac{\omega - (m+n-1)\omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}} Z\left(\frac{\omega_1 - (m+n-1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}k_{\parallel}}\right) \right\} \right. \\
& \quad \times \frac{1}{k_{\parallel}\{\omega_1 - (n-1)\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel}\{\omega - (m+n-1)\omega_{c\alpha}\}} \\
& \quad + \frac{\Gamma(m+n+l+2)}{2^2\Gamma(m+n)} \cdot \left(\frac{k_{\perp}}{\omega_{c\alpha}}\right)^{+1} \cdot V_{T\alpha}^2 \cdot {}_1F_1(n+m+l+2; m+n+2; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2}) \times \\
& \quad \left. \left\{ \frac{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}} Z\left(\frac{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}}\right) - \frac{\omega - (m+n+1)\omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}} Z\left(\frac{\omega_1 - (m+n+1)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}k_{\parallel}}\right) \right\} \right. \\
& \quad \times \frac{1}{k_{\parallel}\{\omega_1 - (n+1)\omega_{c\alpha}\} - q_{\parallel}\{\omega - (m+n+1)\omega_{c\alpha}\}} \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2E_{\parallel}^{\mathbf{k}-q, \omega-\omega_1} E_{\parallel}^{\mathbf{q}, \omega_1} \left(\frac{q_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}}\right) \times \\
& \frac{\Gamma(m+n+l+1)}{2^1\Gamma(m+n+1)} \cdot V_{T\alpha}^2 \cdot {}_1F_1(n+m+l+1; m+n+1; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2}) \times \\
& \left[ -\frac{1}{\left(\frac{k_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}}\right)} \cdot \frac{2}{q_{\parallel}\{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}\} - k_{\parallel}(\omega_1 - n\omega_{c\alpha})} \cdot \right. \\
& \quad \frac{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}k_{\parallel}} \cdot \left\{ 1 + \frac{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}k_{\parallel}} Z\left(\frac{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}k_{\parallel}}\right) \right\} \\
& \quad - \frac{\omega_{c\alpha}(\omega_1 - n\omega_{c\alpha})}{[q_{\parallel}\{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}\} - k_{\parallel}(\omega_1 - n\omega_{c\alpha})]^2} \cdot \left\{ Z\left(\frac{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}k_{\parallel}}\right) - Z\left(\frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}k_{\parallel}}\right) \right\} \\
& \quad + \frac{1}{\left(\frac{q_{\parallel}}{\omega_{c\alpha}}\right)} \cdot \frac{2}{k_{\parallel}(\omega_1 - n\omega_{c\alpha}) - q_{\parallel}\{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}\}} \cdot \\
& \quad \frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}} \cdot \left\{ 1 + \frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}} Z\left(\frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}}\right) \right\} \\
& \quad + \frac{\omega_{c\alpha}\{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}\}}{[k_{\parallel}(\omega_1 - n\omega_{c\alpha}) - q_{\parallel}\{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}\}]^2} \cdot \left\{ Z\left(\frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}}\right) - Z\left(\frac{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}}{V_{T\alpha}q_{\parallel}}\right) \right\} \\
& \quad + E_{\parallel}^{\mathbf{k}-q, \omega-\omega_1} E_{\parallel}^{\mathbf{q}, \omega_1} \times \frac{\Gamma(n+m+l+1)}{\Gamma(n+m+1)} \cdot {}_1F_1(n+m+l+1; m+n+1; -\frac{k_{\perp}^2 V_{T\alpha}^2}{4\omega_{c\alpha}^2}) \\
& \quad \cdot \left[ -\frac{2V_{T\alpha}}{q_{\parallel}} + \frac{1}{k_{\parallel}(\omega_1 - n\omega_{c\alpha}) - q_{\parallel}\{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}\}} \left\{ \left( V_{T\alpha}^2 - 2\left(\frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}}\right)^2 \right) \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. Z\left(\frac{\omega_1 - n\omega_{c\alpha}}{q_{\parallel}}\right) - \left( V_{T\alpha}^2 - 2\left(\frac{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}}\right)^2 \right) Z\left(\frac{\omega - (m+n)\omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}}\right) \right\} \right] \quad (5.27)
\end{aligned}$$

## 5.2 繰り込み理論

逐次近似法により二次までの計算を定式化した、これを用いて、具体的に電子ビーム・プラズマ系に生じる高域混成波とイオン波の相互作用が求められないか試みた。しかし、その計算項が多過ぎて、手計算でまともに処理することは相当困難で、やむを得ず、無視できる項を除いた近似によらざるを得なかった。実験から得られたイオン波波形を外部の電界として、高域混成波波形に与える影響を計算をしたが、実験波形を説明できるような結果は得られなかった。小さな項と考えたものが、そうではなかったと思われる。そこで、物理的に漸近解を取り出すことのできる繰り込み手法を適用し、高域混成波がソリトン波形となることを示す。



## 5.2.1 粒子軌道の繰り込み

輻射強度に依存する速度空間に於ける拡散を考えて、Coherent な相互作用、いいかえれば、波数が同じ  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  の相互作用を考える方向に進む。そのため、Coherent を考える時点まで Al'tshul, Karpman [12], Dupree [13], Weinstock [18], Kono Ichikawa [31] の開発した方法を用いるが、Coherent を考慮するために、Horton の Gaussian 型の Green 関数を用いることにする。まず、最初は電界が無い場合の粒子軌道を考える。これは直線軌道を意味する。この直線軌道に対応する Green の関数を導き、次に電界による効果を取り入れることにするが、これは電界によって粒子軌道が湾曲することを意味する。電界のない場合の電子流の分布関数  $f_\alpha(r, v, t)$  は次のようになる。

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right\} f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = 0 \quad (5.28)$$

遅延グリーン関数を  $G_\alpha^{(0)}$  とすると、 $G_\alpha^{(0)}$  に関する方程式は次のようになる。

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right\} G_\alpha^{(0)} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(t - t') \quad (5.29)$$

さて、(5.29) 式の両辺を空間及び時間について Fourier 変換し、 $G_\alpha^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t; \mathbf{r}', \mathbf{v}', t')$  の変換を  $G_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega')$  とすると、変換は次のようになる。

$$G_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') = -\frac{i}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \omega') \quad (5.30)$$

次に、電界  $\mathbf{E}$  が存在する場合を考える。Green 関数 (伝播関数) を  $G_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t; \mathbf{r}', \mathbf{v}', t')$  とする。ここで添字  $\alpha$  は電子に対して  $\alpha = e$ 、イオンに対して  $\alpha = i$  を表すことにして、 $G_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t; \mathbf{r}', \mathbf{v}', t')$  を簡単に  $G_\alpha$  と書くこともある。この Green の関数は次の方程式を満足する。

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} G_\alpha = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(t - t') \quad (5.31)$$

if  $t < t' \quad G_\alpha = 0$

(5.28) 式と (5.31) 式から  $G_\alpha$  に対する積分方程式は次のようになる。

$$G_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t; \mathbf{r}', \mathbf{v}', t') = G_\alpha^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t; \mathbf{r}', \mathbf{v}', t') - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int_0^t dt'' \int d\mathbf{r}'' \int d\mathbf{v}'' G_\alpha^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t; \mathbf{r}'', \mathbf{v}'', t'') \mathbf{E}(\mathbf{r}'', t'') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}''} G_\alpha(\mathbf{r}'', \mathbf{v}'', t''; \mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \quad (5.32)$$

(5.31) 式に現れる電界  $\mathbf{E}$  は外部電極によって加えられた電界  $\mathbf{E}_{ext}$  と内部の荷電粒子による電界の両方を含む。しかし以後では外部電極による電界は考えないことにし、荷電粒

子による電界を考える。また、荷電粒子による高周波電界に対しては縦波近似を用いることにする。これは  $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - (\partial \mathbf{A} / \partial t)$  に於いてベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}$  の項を無視し、電位  $\Phi$  の項のみを用いることを意味する。すると自己無撞着な電界は Poisson の方程式によって決まる。

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{\epsilon_0} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{v}' G_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t; \mathbf{r}', \mathbf{v}', t' = 0) \cdot f_\alpha^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t' = 0) + \text{div } \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}, t) \quad (5.33)$$

ここで  $f_\alpha^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', 0)$  は  $t=0$  の時刻に於ける分布関数の初期値を表し、また、任意の時刻  $t$  に於ける分布関数  $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  は次のようになる。

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{v}' G_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t; \mathbf{r}', \mathbf{v}', t' = 0) \cdot f_\alpha^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t' = 0) \quad (5.34)$$

$G_\alpha$  を求めるためには裏領域で計算を進める方がはるかに簡単である。(5.32) 式を Fourier 変換すると

$$G_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') = G_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \sum_{k_1} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int d\mathbf{v}_1 G_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}_1, \mathbf{v}_1, \omega_1) \mathbf{E}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} G_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{v}_1, \omega - \omega_1; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') \quad (5.35)$$

となる。(5.30) 式から出発して積分方程式 (5.35) に逐次的に代入すれば、二次近似としての (5.35) 式の二項目の寄与は次のようになる。

$$G_\alpha^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') = \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \sum_{k_1} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int d\mathbf{v}_1 \int d\mathbf{v}_2 G_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}_1, \mathbf{v}_1, \omega_1) \mathbf{E}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \left\{ G_\alpha^{(0)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{v}_1, \omega - \omega_1; -\mathbf{k}_1, \mathbf{v}_2, -\omega_1) \mathbf{E}(-\mathbf{k}_1, -\omega_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} G_\alpha^{(0)}(-\mathbf{k}_1, \mathbf{v}_2, -\omega_1; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') \right\} \quad (5.36)$$

以後の計算は、組織的に進めるために便利な図形を用いることにし、図形表示法は下図に従うようにする。

$$\begin{aligned} G_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') &\Rightarrow \text{---} \\ \sum_k \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} &\Rightarrow \bullet \\ \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) &\Rightarrow \text{~~~~~} \end{aligned} \quad (5.37)$$



(5.37) 式の記号によれば, (5.36) 式は次の図で表される。

$$(5.38)$$

ここで,  $\left\{ \begin{smallmatrix} -\vec{k}_1 \\ -\omega_1 \end{smallmatrix} \right\}$  は電子によるエネルギー  $\hbar\omega_1$  運動量  $\hbar\vec{k}_1$  の素励起の放出を表し, 一方  $\left\{ \begin{smallmatrix} +\vec{k}_1 \\ +\omega_1 \end{smallmatrix} \right\}$  は電子による素励起の吸収を表す。

次に直線運動を表す Green 関数 (5.30) 式の  $G_\alpha^{(0)} = -i/(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$  を (5.36) 式に代入して得られる二次の Green 関数  $G^{(2)}(\vec{k}, \vec{v}, \omega)$  を求め, 逆変換 ( $\omega$  で積分) すると,

$$G^{(2)}(\vec{k}, \vec{v}, t) = \text{Const} \cdot t^3 \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{v}t) \quad (5.39)$$

となり, 時間の三乗で発散する。高次項では高い次数に於いて発散が起きる。例えば四次の項では,

$$\Rightarrow C_1 \cdot t^5 \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{v}t), \quad \Rightarrow C_2 \cdot t^5 \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{v}t) \quad (5.40)$$

しかし,

$$\Rightarrow C_3 \cdot t^6 \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{v}t) \quad (5.41)$$

次数が同じ場合でも, 時間的に発散し易い項のみを重点的に加算することにする。それは, 時間経過 ( $t \rightarrow \infty$ ) と共に主要部を占めるであろうと思われるからである。高次の非線形過程まで考慮した軌道の繰り込みは図で示すと最終的には次のような図形で表される。

$$(5.42)$$

この図は Dyson の方程式を表しており, 式で書けば (5.43) 式と表現できる。

$$G_\alpha = G_\alpha^{(0)} + G_\alpha^{(0)} \sum_\alpha G_\alpha \quad (5.43)$$

ここで  $\sum_\alpha^{(0)} =$  は自己エネルギー項と呼ばれるもので, 次式で計算される。

$$\sum_\alpha^{(0)}(\vec{k}, \vec{v}, \omega; \vec{k}', \vec{v}', \omega') = \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \sum_{\vec{k}_1} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} E(\vec{k}_1, \omega_1) \times \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left\{ G_\alpha^{(0)}(\vec{k} - \vec{k}_1, \vec{v}, \omega - \omega_1; \vec{k}', \vec{v}', \omega') E(-\vec{k}_1, \omega_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right\} \quad (5.44)$$

(5.43) 式の Green 関数の解 (裏表示) は (5.30) 式と異なり自己エネルギー項を含むことになる。

$$G_\alpha(\vec{k}, \vec{v}, \omega; \vec{k}', \vec{v}', \omega') = \frac{i}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} + i \sum_\alpha^{(0)}(\vec{k}, \vec{v}, \omega; \vec{k}', \vec{v}', \omega')} \quad (5.45)$$

(5.45) 式は共鳴相互作用  $\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}$  が広がりをもつことを示し, スペクトルは広がりをもつ。したがって, 素励起の寿命  $\tau$  は次のようになる。

$$\tau = 1/\{2 \sum_\alpha^{(0)}\} \quad (5.46)$$

ここで, (5.44) 式の中の  $G_\alpha^{(0)}$  と  $\sum_\alpha^{(0)}$  を  $G_\alpha$  及び  $\sum_\alpha$  で置き換え, もう一段計算を進めて, 繰り込みを行うことができる。そして, 次の図に対応して Dyson の (5.48) 式が得られる。

$$G_\alpha(\vec{k}, \vec{v}, \omega; \vec{k}', \vec{v}', \omega') = \text{---} = \text{---} + \text{---} \quad (5.47)$$

$$G_\alpha = G_\alpha^{(0)} + G_\alpha^{(0)} \sum_\alpha G_\alpha \quad (5.48)$$

$$\sum_\alpha = \text{---} \quad (5.49)$$

$$= \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \sum_{\vec{k}_1} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} E(\vec{k}_1, \omega_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left\{ G_\alpha(\vec{k} - \vec{k}_1, \vec{v}, \omega - \omega_1) E(-\vec{k}_1, -\omega_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right\}$$

繰り込まれた自己エネルギー (5.49) 式を用いると, 表表示の Green 関数 (5.50) 式と速度空間に於ける拡散係数  $D_{ij}$  (5.51) 式が得られる。Konno, Ichikawa<sup>(4)</sup> は, この方法で次の (5.29), (5.51) 式を得た。

$$G_\alpha(\vec{k}, \vec{v}, t; \vec{k}', \vec{v}', t') = \exp \left\{ -i\vec{k} \cdot \vec{v}t - \frac{t^3}{3} \vec{k}_i \vec{k}_j D_{ij}(\vec{k}, \vec{v}) \right\} \quad (5.50)$$

$$D_{ij}(\vec{k}, \vec{v}) = \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \sum_{\vec{k}_1} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{\vec{k}_{1i} \vec{k}_{1j}}{k_1^2} |E(\vec{k}_1, \omega_1)|^2 \int_0^t dt \cdot \exp \{ -i(\omega_1 - \vec{k} \cdot \vec{v})t \} \cdot \exp \left[ -\frac{t^3}{3} (\vec{k} - \vec{k}_1)_i (\vec{k} - \vec{k}_1)_j D_{ij}(\vec{k} - \vec{k}_1, \vec{v}) \right] \quad (5.51)$$



## 5.2.2 Coherence の効果の導入

プラズマ内の電界に対する非線形効果を論ずる際に、コヒーレントな相互作用つまり波自身の非線形効果  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$  の場合が最も重要になる。ところで、(5.50) 式、(5.51) 式は  $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}$  の時、パラメトリック効果等の非線形効果の検討に対し極めて有用になると考えられる。しかし、(5.51) 式の拡散テンソル  $D_{ij}$  の構造から、 $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$  の場合に限って、この  $D_{ij}$  は準線形理論に現れる拡散テンソルになることがわかる。すなわち、折角、自己エネルギーを含む理論が、準線形理論のレベルまで退化したことになる。これではコヒーレントな相互作用は到底扱えないことになる。ここで、 $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$  を (5.49) 式に代入すると、自己エネルギー  $\Sigma_\alpha$  中の Green 関数の  $\mathbf{k} = 0$  即ち、 $G_\alpha(\mathbf{k} = 0)$  の検討を行うことと同等になる。これまで、多くの理論で、もっともらしい理由と共に  $\mathbf{k}_{\min}$  で、 $\mathbf{k} = 0$  での発散を Cut-off したことの解決を、ここに再び要請されたことになる。

多くの電子相関の理論に於いては、金属や、気体プラズマの性質を左右するのは電子であり、イオンは、その実態をばやかし、全体の電荷の中性を保証する正電荷の様な雲である、とする‘一成分プラズマ’ (One Component Plasma; **OCP**) が用いられてきた。電子的損失に関わる、‘動的誘電関数’ や、Lindhard の誘電率 [7] 等がそれである。そこでは、電子による電界の  $\mathbf{k}=0$  の成分は、イオンの  $\mathbf{k}=0$  によって完全に打ち消されているとする。一方、 $(\omega, \mathbf{k})$  の波と  $(\omega_1, \mathbf{k}_1)$  の波が相互作用して、 $(\omega \pm \omega_1, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_1)$  の波ができたとする。 $\mathbf{k}=\mathbf{k}_1$  の時は、2倍の高調波と直流分を生じる。この直流分が、一成分プラズマ (OCP) 特有の、電子とイオンのバランスした  $\mathbf{k} = 0$  の状況を変化させることになる。

さて、(5.50) 式の代わりに Horton がイオン波乱流の解析に用いる際に考えた [46] Green 関数を拡散テンソルの対称性も考慮して整備した形で使用する。まずオリジナルの Horton の Green 関数は次のようになる。

$$G_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{v}', t) = -i \{4\pi D(\mathbf{k})t\}^{-\frac{3}{2}} \cdot \exp \left[ -\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2}{4D(\mathbf{k})t} - \frac{\mathbf{k}^2 D(\mathbf{k})}{12} t^3 - \frac{i}{2} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}') t \right] \quad (5.52)$$

これに対して、ここで使用する Green 関数は以下のものである。

$$G_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t; \mathbf{k}', \mathbf{v}', t' = 0) = -i \left\{ \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) t \right\}^{-\frac{3}{2}} \cdot \exp \left[ -\frac{\mathbf{k}_i (\mathbf{v} - \mathbf{v}')_i \mathbf{k}_j (\mathbf{v} - \mathbf{v}')_j}{4\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) t} - \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v})}{12} t^3 - \frac{i}{2} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}') t \right] \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (5.53)$$

(5.31), (5.33) は共に (5.29) の Green 関数とよく似ていることがわかる。さらに Horton により種々の必要条件を満たしていることが報告されている。さて (5.53) 式は実時間の表示で与えられ複雑であるが、幸いにも以下の方法で Fourier 変換できる [71]。変換 (5.33) の  $F(p)$  に対して (5.55) 式の  $F^*(p)$  を考えると、 $F(p) = F^*(p+c)$  の関係があり、さらに (5.56) 式の公式を用いる。

$$F(p) = \int_0^\infty dt \cdot t^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{a}{t} - bt^3 - ct \right\} \cdot \exp(-pt) \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} F^*(p) &= \int_0^\infty dt \cdot t^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{a}{t} - bt^3 \right\} \cdot \exp(-pt) \\ &= \sum_{m=0}^\infty \frac{(-b)^m}{m!} \int_0^\infty dt \cdot \exp \left\{ -\frac{a}{t} \right\} \cdot t^{(3m-\frac{3}{2})} \exp(-pt) \\ &= \sum_{m=0}^\infty \frac{(-b)^m}{m!} \int_0^\infty dt \cdot \frac{\exp \left\{ -\frac{(2\sqrt{a})^2}{4t} \right\}}{t^{-(3m-\frac{1}{2})+1}} \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\int_0^\infty dt \cdot \frac{\exp \left\{ -\frac{a^2}{4t} \right\}}{t^{\nu+1}} \cdot \exp(-pt) = \frac{2^{\nu+1} p^{\frac{\nu}{2}}}{a^\nu} \cdot K_\nu(a\sqrt{p}) \quad (5.56)$$

変換の結果は変形ベッセル関数  $K_n(x)$  で表すと (5.57) 式となり、式中の定数  $a, b, c$  には (5.58) 式に示す量に対応する。

$$\begin{aligned} G_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') &= \int_0^\infty dt \cdot \exp(i\omega t) \cdot G_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t; \mathbf{k}', \mathbf{v}', t' = 0) \\ &= - \int_0^\infty idt \cdot \exp(i\omega t) \left\{ \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) t \right\}^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad \cdot \exp \left[ -\frac{\mathbf{k}_i (\mathbf{v} - \mathbf{v}')_i \mathbf{k}_j (\mathbf{v} - \mathbf{v}')_j}{4\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) t} - \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v})}{12} t^3 - \frac{i}{2} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}') t \right] \\ &\quad \times \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\omega, \omega'} \\ &= -2i \left\{ \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) \right\}^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-b)^m}{m!} \left\{ \frac{a}{i(-\omega + c)} \right\}^{\frac{3m}{2} - \frac{1}{4}} \\ &\quad \cdot K_{3m-\frac{1}{2}} \left\{ 2\sqrt{ia(-\omega + c)} \right\} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\omega, \omega'} \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$a = \frac{\mathbf{k}_i (\mathbf{v} - \mathbf{v}')_i \mathbf{k}_j (\mathbf{v} - \mathbf{v}')_j}{4\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v})}, \quad b = \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v})}{12}, \quad c = \frac{\mathbf{k}}{2} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}') \quad (5.58)$$

また、電界強度に依存する速度空間の拡散係数  $D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v})$  は次のように求まる。

$$\begin{aligned} D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) &= \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}_1} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{\mathbf{k}_{1i} \mathbf{k}_{1j}}{k_1^2} |E(\mathbf{k}, \omega_1)|^2 \\ &\quad \times G_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{v}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_1; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') \end{aligned} \quad (5.59)$$

この (5.57) 式の Green 関数と (5.59) 式の拡散係数は共に電界の関数であるが、電界  $E(\mathbf{k}, \omega)$  は自己無撞着に次の式によって決定される。

$$\begin{aligned} E(\mathbf{k}, \omega) &= - \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{\epsilon_0} \cdot \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \\ &\quad \times G_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') \cdot f_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') \end{aligned} \quad (5.60)$$

さらに、電子の分布関数は次の式によって逐次的に近似を高めることができる。

$$f_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \int d\mathbf{v}' G_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') \cdot f_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') \quad (5.61)$$



結局 (5.57) 式, (5.59) 式, (5.60) 式, (5.61) の式が最終的に得られた基礎方程式の組になる。また (5.57) 式, (5.58) 式 で与えられる Green の関数の  $m=0 \sim m=2$  に対応するものは、以下ようになる。

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') = -2i \left\{ 4\pi \left( \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{k^2} \right) \cdot D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) \right\}^{-\frac{3}{2}} \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-b)^m}{m!} \left\{ \frac{a}{i(-\omega + c)} \right\}^{\frac{3m}{2} - \frac{1}{4}} K_{3m - \frac{1}{2}} \{ 2\sqrt{i a(-\omega + c)} \} \cdot \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\omega, \omega'} \quad (5.62)$$

ここで,

$$a = \frac{\mathbf{k}_i(\mathbf{v} - \mathbf{v}')_i \mathbf{k}_j(\mathbf{v} - \mathbf{v}')_j}{4\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j \cdot D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v})}, \quad b = \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j \cdot D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v})}{12}, \quad c = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i\Sigma_\alpha$$

$$G_\alpha^{(m=0)}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = -\frac{i}{4\pi D_{ij}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \cdot \exp \left( -\frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \cdot \sqrt{i(-\omega + c)} \right)$$

$$G_\alpha^{(m=1)}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \frac{i}{1566\pi} \cdot \frac{k^2}{\sqrt{D_{ij}}} \left[ 4 \cdot \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2}{D_{ij}} \{ i(-\omega + c) \} + 3 \cdot \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \cdot \sqrt{i(-\omega + c)} + 3 \right]$$

$$\times \frac{1}{\{ i(-\omega + c) \}^2 \sqrt{i(-\omega + c)}} \cdot \exp \left( -\frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \cdot \sqrt{i(-\omega + c)} \right)$$

$$G_\alpha^{(m=2)}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \frac{i \sqrt{D_{ij}} k^4}{73728\pi} \cdot \left[ \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^5}{D_{ij}^{\frac{5}{2}}} \{ i(-\omega + c) \}^{\frac{5}{2}} + 15 \cdot \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^4}{D_{ij}^2} \{ i(-\omega + c) \}^2 \right.$$

$$\left. + 105 \cdot \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3}{D_{ij}^{\frac{3}{2}}} \{ i(-\omega + c) \}^{\frac{3}{2}} + 420 \cdot \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2}{D_{ij}} \{ i(-\omega + c) \} \right.$$

$$\left. + 945 \cdot \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \cdot \sqrt{i(-\omega + c)} + 945 \right] \{ i(-\omega + c) \}^{-\frac{11}{2}} \cdot \exp \left( -\frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \cdot \sqrt{i(-\omega + c)} \right)$$

## 5.3 ソリトンの導出

### 5.3.1 速度空間に於ける拡散係数の解析

基礎方程式の組の一つである速度空間に於ける拡散係数  $D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v})$  について解析する。その式は次のようになっている。

$$D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}_1} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_{1j}}{k_1^2} |E(\mathbf{k}_1, \omega_1)|^2 \\ \times G_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{v}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_1; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') \cdot \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\omega, \omega'} \quad (5.63)$$

(4.56) 式中の Green 関数  $G_\alpha$  には次の  $m=0$  の項のみ代入する。

$$G_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') = -\frac{i}{4\pi D_{ij}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \cdot \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \sqrt{i(-\omega + c)} \right\} \quad (5.64)$$

ここに於いては  $c = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha$  である。したがって、 $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega \rightarrow \omega - \omega_1$  とすれば  $G_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{v}, \omega - \omega_1; \mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega)$  は次の式になる。

$$G_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{v}, \omega - \omega_1; \mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = -\frac{i}{4\pi D_{ij}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \\ \times \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \sqrt{[i(\omega - \omega_1) - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha]} \right\} \quad (5.65)$$

そして  $p_1 = -i\omega_1$  とおくと,

$$G_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{v}, \omega - \omega_1; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') \\ = -\frac{i}{4\pi D_{ij}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \cdot \exp \left\{ -i \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \sqrt{p_1 + i\omega - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha} \right\} \\ = -\frac{i}{4\pi D_{ij}} \cdot \frac{i}{\sqrt{D_{ij}}} \cdot \frac{\sqrt{D_{ij}}}{i|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \cdot \exp \left\{ -i \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \sqrt{p_1 + i\omega - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha} \right\} \\ = \frac{1}{4\pi D_{ij}^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{A} \cdot \exp \left\{ -A \sqrt{p_1 + i\omega - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha} \right\} \quad (5.66)$$

$$A \equiv i \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \quad (5.67)$$

解析の簡単化の為に  $c = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  と置くこともあるが、ここでは  $c = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha$  として解析を進めている。これに関しては *Resonance Broadening* を考慮した場合であって、解析結



果の形は $\Sigma_\alpha$ の項が現れるだけであって基本的に変わらない。さて、(5.63)式中の $\omega_1$ についての積分は次のようになる。

$$\int G_\alpha d\omega_1 = \int \frac{1}{4\pi D_{ij}^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{A} \cdot \exp \left\{ -A\sqrt{p_1 + i\omega - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha} \right\} idp_1 \quad (5.68)$$

ここで、 $x = \sqrt{p_1 + i\omega - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha}$ とおくと、 $dp_1 = 2xdx$ となり(5.68)式は

$$I = \int \frac{1}{A} x \cdot \exp(-Ax) dx \text{ となる。}$$

$$\int x^\lambda \exp(-\alpha x) dx = \left( -\frac{1}{\alpha} \right) x^\lambda \cdot \exp(-\alpha x) + \left( \frac{\lambda}{\alpha} \right) \int x^{\lambda-1} \cdot \exp(-\alpha x) dx \quad (5.69)$$

公式(5.69)より、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{A} \left[ \left( -\frac{1}{A} \right) x \exp(-Ax) + \left( \frac{1}{A} \right) \int \exp(-Ax) dx \right] \\ &= \frac{1}{A} \left[ \left( -\frac{1}{A} \right) x \exp(-Ax) - \frac{1}{A^2} \exp(-Ax) \right] \\ &= -\frac{1}{A^2} x \exp(-Ax) - \frac{1}{A^3} \exp(-Ax) \end{aligned}$$

すると、(5.68)式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \int G_\alpha d\omega_1 &= \frac{2i}{4\pi D_{ij}^{\frac{3}{2}}} \left[ -\frac{1}{A^2} \sqrt{p_1 + i\omega - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha} \right. \\ &\quad \times \exp \left( -A\sqrt{p_1 + i\omega - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha} \right) \\ &\quad \left. - \frac{1}{A^3} \cdot \exp \left( -A\sqrt{p_1 + i\omega - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha} \right) \right] \\ &= \frac{i}{2\pi D_{ij}^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[ \frac{D_{ij}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} \sqrt{i(\omega - \omega_1) - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha} \right. \\ &\quad \times \exp \left\{ -i \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \sqrt{i(\omega - \omega_1) - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha} \right\} \\ &\quad \left. - \frac{i D_{ij}^{\frac{3}{2}}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \cdot \exp \left\{ -i \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \sqrt{i(\omega - \omega_1) - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha} \right\} \right] \quad (5.70) \end{aligned}$$

結局、速度空間に於ける拡散係数、(5.63)式は次のようになる。

$$D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{k^2} |E(\mathbf{k}, \omega)|^2 \cdot \frac{i}{4\pi^2 D_{ij}^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} &\times \left[ \frac{D_{ij}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} \sqrt{i(\omega - \omega_1) - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha} - \frac{i D_{ij}^{\frac{3}{2}}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \right] \\ &\times \exp \left\{ -i \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \sqrt{i(\omega - \omega_1) - i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v} - \Sigma_\alpha} \right\} \quad (5.71) \end{aligned}$$

となる。ここで *Coherent* な相互作用を考える。何故ならソリトンは *Coherent* な相互作用によって引き起こされるからである。そこで、 $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}$ ,  $\omega_1 \rightarrow \omega$ ,  $\omega \rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  とおく。すると、

$$\begin{aligned} D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) &= \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{k^2} |E(\mathbf{k}, \omega)|^2 \cdot \frac{i}{4\pi^2 D_{ij}^{\frac{3}{2}}} \\ &\times \left[ \frac{D_{ij}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} \sqrt{-\Sigma_\alpha} - \frac{i D_{ij}^{\frac{3}{2}}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \right] \cdot \exp \left\{ -i \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \sqrt{-\Sigma_\alpha} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{k^2} |E(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2 \cdot \frac{i}{2 D_{ij}^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[ \frac{\sqrt{-\Sigma_\alpha}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} - \frac{i \sqrt{D_{ij}}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ -i \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \sqrt{-\Sigma_\alpha} \right\} \\ D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{k^2} |E(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2 \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} - \frac{1}{2 D_{ij}^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma_\alpha}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \sqrt{\Sigma_\alpha} \right\} \quad (5.72) \end{aligned}$$

以前、*Resonance Broadening* を考慮せずに拡散係数を求めた。その解析結果は(5.72)式の一項目のみであった。しかし *Resonance Broadening* により第二項が付け加えられる結果になった。そして第二項を次のように変形する。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\sqrt{D_{ij}}} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma_\alpha}}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma_\alpha} |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}} |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \cdot \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \sqrt{\Sigma_\alpha}}{\sqrt{D_{ij}}} \quad (5.73) \end{aligned}$$

(5.72)式の両辺を $|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2 \Sigma_\alpha$ で割ると、

$$\begin{aligned} \frac{D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v})}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2 \Sigma_\alpha} &= \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{k^2} |E(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2 \\ &\times \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^5 \Sigma_\alpha} \cdot \left[ 1 - \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \Sigma_\alpha}{\sqrt{D_{ij}}} \right] \cdot \exp \left\{ \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \sqrt{\Sigma_\alpha} \right\} \quad (5.74) \end{aligned}$$



$y \equiv \frac{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|\sqrt{\Sigma_\alpha}}{\sqrt{D_{ij}}}$  と定義する。すると次の関係式が導かれる。

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j |E(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2}{\mathbf{k}^2 \Sigma_\alpha |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^5} \cdot (1-y) \cdot e^y \quad (5.75)$$

この関係式より右辺、左辺共に正のため  $0 < y < 1$  と考えられるから、 $D_{ij} > |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2 \Sigma_\alpha$  である。そして、 $C_1 = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{\mathbf{k}^2}$  とすれば、(5.75) 式は最終的に次のようにより簡単に表せる。

$$D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \frac{C_1 |E(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \cdot (1-y) \cdot e^y \quad (5.76)$$

(4.2.2)  $m=0$  における Green 関数の変形

$m=0$  における Green 関数は (5.64) 式で与えられる。そこで (5.43) 式に  $D_{ij}$  を代入するが、

(5.72) 式の第一項のみを考え、また  $y=0$  とする。すなわち、*Resonance Broadening* の効果を無視して解析を進める。

$$D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \frac{C_1 |E(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \quad (5.77)$$

とする。すると  $G_\alpha$  は、

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') &= -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{1}{C_1 \frac{|\mathbf{E}|^2}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^3}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|} \cdot \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}{\sqrt{C_1} \sqrt{\frac{|\mathbf{E}|^2}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^3}}} \cdot \sqrt{p+ic} \right\} \\ &= -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^2}{C_1 |\mathbf{E}|^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{C_1} |\mathbf{E}|} \cdot \sqrt{p+ic} \right\} \end{aligned} \quad (5.78)$$

次に基礎方程式の組の一つである自己無撞着的に決まる高周波電界  $E(\mathbf{k}, \omega)$  について解析する。その式は次のようになっている。

$$\begin{aligned} E(\mathbf{k}, \omega) &= -\sum_\alpha \frac{e_\alpha}{\varepsilon_0} \cdot \frac{i\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \\ &\quad \times G_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') \cdot f_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') \end{aligned} \quad (5.79)$$

ここで、 $f_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega')$  は  $t'=0$  での電子 ( $\alpha=e$ ) の分布関数を想定する。そして、次のようにおく。

$$f_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') = f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \cdot f_2^{(0)}(\mathbf{v}') \quad (5.80)$$

ここで、

$$f_2^{(0)}(\mathbf{v}') = C_{v_0}(v_0) \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_0) = n_b \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_0) \quad (5.81)$$

とする。ただし、 $C_{v_0}(v_0)$  は速度空間の体積あたりの粒子密度の次元の量で  $n_b$  とする。すると (5.73) 式は、

$$f_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') = f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \cdot n_b \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_0) \quad (5.82)$$

となる。これより (5.79) 式に (5.78) 式、(5.61) を代入して  $p = -i\omega$ ,  $c = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  として解析を進める。

$$\begin{aligned} E(\mathbf{k}, p) &= -\sum_\alpha \frac{e_\alpha}{\varepsilon_0} \cdot \frac{i\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \\ &\quad \times \left[ -\frac{i}{4\pi} \cdot \frac{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^2}{C_1 |\mathbf{E}|^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{C_1} |\mathbf{E}|} \cdot \sqrt{p+ic} \right\} \right] \cdot \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \cdot f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \cdot n_b \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_0) \\ &= \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{\varepsilon_0} \cdot \frac{i\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \int d\mathbf{v} \frac{in_b |\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^2}{4\pi C_1 |\mathbf{E}|^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{C_1} |\mathbf{E}|} \cdot \sqrt{p+ic} \right\} \\ &= \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{\varepsilon_0} \cdot \frac{i\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \cdot I \end{aligned} \quad (5.83)$$

ここで、

$$I = \int d\mathbf{v} \frac{in_b |\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^2}{4\pi C_1 |\mathbf{E}|^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{C_1} |\mathbf{E}|} \cdot \sqrt{p+ic} \right\} \quad (5.84)$$

これから、 $I$  について解く。ここで、

$$\begin{aligned} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_0| &= \sqrt{v^2 + v_0^2 - 2v_0 v \sin\theta} \int dv \\ &= \int v^2 dv \int \sin\theta d\theta \int d\phi \end{aligned}$$

とすると、 $\phi$  の積分範囲は  $0 \sim 2\pi$  なので、

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

$\theta$  の積分範囲は  $0 \sim \pi$  なので、 $\cos\theta = \nu$  とおくと  $\frac{d\nu}{d\theta} = -\sin\theta$  であるから、

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \int_{-1}^1 (-d\nu)$$

次に  $v^2 + v_0^2 - 2v_0 v \nu = \eta$ ,  $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0| = \sqrt{\eta}$  とおくと、 $\frac{d\eta}{dv} = -2v_0 \nu$ ,  $-d\nu = \frac{1}{2v_0 v} d\eta$  となるので、

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \int_{(v-v_0)^2}^{(v+v_0)^2} \frac{1}{2v_0 v} d\eta$$



以上より,  $I$  は,

$$I = \frac{n_b}{4C_1|E|^2} \cdot \frac{1}{v_0} \int dv \int_{(v-v_0)^2}^{(v+v_0)^2} \eta \cdot \exp \left\{ -\frac{\sqrt{p+ic}}{\sqrt{C_1|E|}} \cdot \eta^{\frac{5}{4}} \right\} d\eta$$

$$= \frac{n_b}{4C_1|E|^2} \cdot \frac{1}{v_0} \int dv \cdot I_1 \quad (5.85)$$

ここで,

$$I_1 = \int_{(v-v_0)^2}^{(v+v_0)^2} \eta \cdot \exp \left\{ -\frac{\sqrt{p+ic}}{\sqrt{C_1|E|}} \cdot \eta^{\frac{5}{4}} \right\} d\eta \quad (5.86)$$

である.  $\eta^{\frac{5}{4}} = \xi$  とおくと,  $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4}{5}\xi^{-\frac{1}{5}}$  であるので,

$$I_1 = \int_{(v-v_0)^{\frac{5}{2}}}^{(v+v_0)^{\frac{5}{2}}} \frac{4}{5}\xi^{\frac{3}{5}} \cdot \exp \left\{ -\frac{\sqrt{p+ic}}{\sqrt{C_1|E|}} \cdot \xi \right\} d\xi$$

$$= \int_{(v-v_0)^{\frac{5}{2}}}^{(v+v_0)^{\frac{5}{2}}} \frac{4}{5}\xi^{\frac{3}{5}} \cdot \exp \{-\alpha \cdot \xi\} d\xi \quad (5.87)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{p+ic}}{\sqrt{C_1|E|}}$$

ここで, 公式(5.88)を用いる.

$$\int_0^x x^{\lambda-1} \cdot \exp(-\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha^\lambda} \cdot \gamma(\lambda, \alpha x) \quad (5.88)$$

したがって,

$$\int \xi^{\frac{3}{5}} \cdot \exp(-\alpha \xi) d\xi = \int \xi^{\left(\frac{8}{5}-1\right)} \cdot \exp(-\alpha \xi) d\xi = \frac{1}{\alpha^{\frac{8}{5}}} \cdot \gamma\left(\frac{8}{5}, \alpha \xi\right) \quad (5.89)$$

すると  $I_1$  は,

$$I_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\alpha^{\frac{8}{5}}} \left[ \gamma\left(\frac{8}{5}, \alpha \xi\right) \right]_{(v-v_0)^{\frac{5}{2}}}^{(v+v_0)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\alpha^{\frac{8}{5}}} \left[ \gamma\left(\frac{8}{5}, \alpha|v+v_0|^{\frac{5}{2}}\right) - \gamma\left(\frac{8}{5}, \alpha|v-v_0|^{\frac{5}{2}}\right) \right]$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\left\{ \frac{\sqrt{p+ic}}{\sqrt{C_1|E|}} \right\}^{\frac{8}{5}}} \left[ \gamma\left(\frac{8}{5}, \frac{\sqrt{p+ic}}{\sqrt{C_1|E|}}|v+v_0|^{\frac{5}{2}}\right) - \gamma\left(\frac{8}{5}, \frac{\sqrt{p+ic}}{\sqrt{C_1|E|}}|v-v_0|^{\frac{5}{2}}\right) \right] \quad (5.90)$$

したがって, (5.83) 式の  $E(\mathbf{k}, p)$  は  $I$  と  $I_1$  より,

$$E(\mathbf{k}, p) = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{\varepsilon_0} \cdot \frac{i\mathbf{k}}{k^2} f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \cdot \frac{n_b}{5C_1|E|^2} \cdot \frac{1}{v_0} \cdot \frac{1}{\left\{ \frac{\sqrt{p+ic}}{\sqrt{C_1|E|}} \right\}^{\frac{8}{5}}} \cdot \int v dv$$

$$\times \left\{ \gamma\left(\frac{8}{5}, \frac{\sqrt{p+ic}}{\sqrt{C_1|E|}}|v+v_0|^{\frac{5}{2}}\right) - \gamma\left(\frac{8}{5}, \frac{\sqrt{p+ic}}{\sqrt{C_1|E|}}|v-v_0|^{\frac{5}{2}}\right) \right\}$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{\varepsilon_0} \cdot \frac{i\mathbf{k}}{k^2} f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \cdot \frac{n_b}{5C_1|E|^2} \cdot \frac{1}{v_0} \cdot \frac{1}{\left\{ \frac{p+ic}{C_1|E|^2} \right\}^{\frac{4}{5}}} \cdot \int v dv$$

$$\times \left[ \gamma\left\{ \frac{8}{5}, \left( \frac{p+ic}{C_1|E|^2} \right)^{\frac{1}{2}} |v+v_0|^{\frac{5}{2}} \right\} - \gamma\left\{ \frac{8}{5}, \left( \frac{p+ic}{C_1|E|^2} \right)^{\frac{1}{2}} |v-v_0|^{\frac{5}{2}} \right\} \right] \quad (5.91)$$

ここで,

$$J_1 = \int v dv \gamma\left\{ \frac{8}{5}, \left( \frac{p+ic}{C_1|E|^2} \right)^{\frac{1}{2}} |v+v_0|^{\frac{5}{2}} \right\}$$

$$J_2 = \int v dv \gamma\left\{ \frac{8}{5}, \left( \frac{p+ic}{C_1|E|^2} \right)^{\frac{1}{2}} |v-v_0|^{\frac{5}{2}} \right\} \quad (5.92)$$

とおくと,

$$E(\mathbf{k}, p) = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{\varepsilon_0} \cdot \frac{i\mathbf{k}}{k^2} f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \cdot \frac{n_b}{5C_1|E|^2} \cdot \frac{1}{v_0} \cdot \frac{1}{\left\{ \frac{p+ic}{C_1|E|^2} \right\}^{\frac{4}{5}}} \cdot (J_1 - J_2) \quad (5.93)$$

$v$  の積分範囲は図 5.3 のように  $v_0 - \frac{iIm\Sigma_a}{2k} \sim v_0 + \frac{iIm\Sigma_a}{2k}$  までと近似する.  $\frac{iIm\Sigma_a}{2}$  は *Resonance* の半値幅と呼ばれ, 速度に換算するとそれは  $\frac{iIm\Sigma_a}{2k}$  となる. したがって  $v$  の積分は,

$$\int_0^{\infty} v dv \simeq \int_{v_0 - \frac{iIm\Sigma_a}{2k}}^{v_0 + \frac{iIm\Sigma_a}{2k}} v dv \quad (5.94)$$

これより  $J_1$  について考える.  $v + v_0 = x$  と於いて変数変換を施す.  $v = x - v_0$  であるため,  $dv = dx$  となる.

したがって  $J_1$  は,

$$J_1 = \int_{2v_0 - \frac{iIm\Sigma_a}{2k}}^{2v_0 + \frac{iIm\Sigma_a}{2k}} dx (x - v_0) \gamma\left\{ \frac{8}{5}, \left( \frac{p+ic}{C_1|E|^2} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} \right\} \quad (5.95)$$

次に  $J_2$  について考える.  $v - v_0 = x$  と於いて変数変換を施す.  $v = x + v_0$  であるため,  $dv = dx$  したがって  $J_2$  は次のようになる.

$$J_2 = \int_{-\frac{iIm\Sigma_a}{2k}}^{+\frac{iIm\Sigma_a}{2k}} dx (x + v_0) \gamma\left\{ \frac{8}{5}, \left( \frac{p+ic}{C_1|E|^2} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} \right\} \quad (5.96)$$



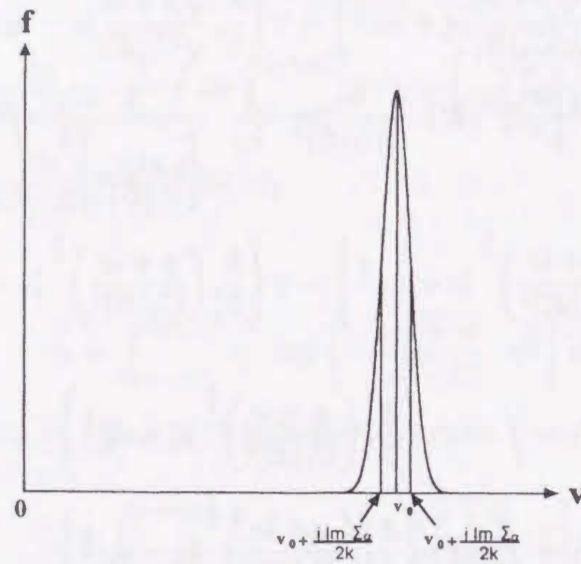


図 5.3: 速度の積分範囲の近似

積分の上限, 下限に含まれている  $Im\Sigma_\alpha$  が  $D_{ij}$  を含み, したがって  $|v - v'|$  の関数になっている。そこでもし上記積分を行ってしまった後では  $|v - v'|$  なる量のある定数で見積もる必要がでてくる。この問題には今は触れず解析を進めていく。その際には次の積分公式 (5.97) を用いる。

$$\int_0^x x^\lambda \cdot \gamma(\alpha, ax^\nu) dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \cdot \gamma(\alpha, ax^\nu) - \frac{1}{(\lambda+1)a^{\frac{\lambda+1}{\nu}}} \cdot \gamma\left(\alpha + \frac{\lambda+1}{\nu}, ax^\nu\right) \quad (5.97)$$

解析は  $J_2$  の方が比較的簡単である。よって  $J_2$  から積分する。

$$J_2 = \left[ \frac{x^2}{2} \cdot \gamma(\alpha, a_1 x^\nu) - \frac{1}{2a_1^{\frac{2}{\nu}}} \cdot \gamma\left(\alpha + \frac{2}{\nu}, a_1 x^\nu\right) \right]_{-\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}}^{+\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}} + v_0 \left[ x \cdot \gamma(\alpha, a_1 x^\nu) - \frac{1}{a_1^{\frac{1}{\nu}}} \cdot \gamma\left(\alpha + \frac{1}{\nu}, a_1 x^\nu\right) \right]_{-\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}}^{+\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}} \quad (5.98)$$

ここで,  $\alpha \equiv \frac{8}{5}$ ,  $a_1 \equiv \left(\frac{v+ic}{c_1|E|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\nu \equiv \frac{5}{2}$  と置いている。 $J_2$  を展開すると,

$$J_2 = \frac{\left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right)^2}{2} \cdot \gamma\left\{\alpha, a_1 \left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right)^\nu\right\} - \frac{1}{2a_1^{\frac{2}{\nu}}} \cdot \gamma\left\{\alpha + \frac{2}{\nu}, a_1 \left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right)^\nu\right\} - \frac{\left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right)^2}{2} \cdot \gamma\left\{\alpha, a_1 \left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right)^\nu\right\} + \frac{1}{2a_1^{\frac{2}{\nu}}} \cdot \gamma\left\{\alpha + \frac{2}{\nu}, a_1 \left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right)^\nu\right\}$$

$$+v_0 \left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right) \cdot \gamma\left\{\alpha, a_1 \left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right)^\nu\right\} - \frac{v_0}{a_1^{\frac{1}{\nu}}} \cdot \gamma\left\{\alpha + \frac{1}{\nu}, a_1 \left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right)^\nu\right\} + v_0 \left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right) \cdot \gamma\left\{\alpha, a_1 \left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right)^\nu\right\} + \frac{v_0}{a_1^{\frac{1}{\nu}}} \cdot \gamma\left\{\alpha + \frac{1}{\nu}, a_1 \left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right)^\nu\right\} \quad (5.99)$$

そして,  $J_2$  の虚数部のみをとると仮定すると (5.99) 式は次のように非常に簡単になる。

$$J_2 = 2iv_0 \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k} \cdot \gamma\left(\alpha, a_1 \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \quad (5.100)$$

次に  $J_1$  について考える。

$$J_1 = \left[ \frac{x^2}{2} \cdot \gamma(\alpha, a_1 x^\nu) - \frac{1}{2a_1^{\frac{2}{\nu}}} \cdot \gamma\left(\alpha + \frac{2}{\nu}, a_1 x^\nu\right) \right]_{2v_0 - \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}}^{2v_0 + \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}} - v_0 \left[ x \cdot \gamma(\alpha, a_1 x^\nu) - \frac{1}{a_1^{\frac{1}{\nu}}} \cdot \gamma\left(\alpha + \frac{1}{\nu}, a_1 x^\nu\right) \right]_{2v_0 - \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}}^{2v_0 + \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}} \quad (5.101)$$

ここで,

$$\gamma\left(\alpha, a_1 \left|2v_0 + \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) = \gamma(\alpha, a_1 |2v_0|^\nu) + \gamma\left(\alpha, a_1 \nu |2v_0|^{\nu-1} \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \\ \gamma\left(\alpha, a_1 \left|2v_0 - \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) = \gamma(\alpha, a_1 |2v_0|^\nu) - \gamma\left(\alpha, a_1 \nu |2v_0|^{\nu-1} \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right)$$

とすれば,

$$J_1 = \frac{1}{2} \left\{ (2v_0)^2 + 4v_0 \cdot \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k} + \left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right)^2 \right\} \\ \times \left\{ \gamma(\alpha, a_1 |2v_0|^\nu) + \gamma\left(\alpha, a_1 \nu |2v_0|^{\nu-1} \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \right\} \\ - \frac{1}{2} \left\{ (2v_0)^2 - 4v_0 \cdot \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k} + \left(\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right)^2 \right\} \\ \times \left\{ \gamma(\alpha, a_1 |2v_0|^\nu) - \gamma\left(\alpha, a_1 \nu |2v_0|^{\nu-1} \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \right\} \\ - v_0 \left\{ 2v_0 + \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k} \right\} \left\{ \gamma(\alpha, a_1 |2v_0|^\nu) + \gamma\left(\alpha, a_1 \nu |2v_0|^{\nu-1} \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \right\} \\ + v_0 \left\{ 2v_0 - \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k} \right\} \left\{ \gamma(\alpha, a_1 |2v_0|^\nu) - \gamma\left(\alpha, a_1 \nu |2v_0|^{\nu-1} \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \right\}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2a_1^\nu} \left\{ \gamma\left(\alpha + \frac{2}{\nu}, a_1|2v_0|^\nu\right) + \gamma\left(\alpha + \frac{2}{\nu}, a_1\nu|2v_0|^{\nu-1} \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \right\} \\
& + \frac{1}{2a_1^\nu} \left\{ \gamma\left(\alpha + \frac{2}{\nu}, a_1|2v_0|^\nu\right) - \gamma\left(\alpha + \frac{2}{\nu}, a_1\nu|2v_0|^{\nu-1} \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \right\} \\
& + v_0 \cdot \frac{1}{a_1^\nu} \cdot \left\{ \gamma\left(\alpha + \frac{1}{\nu}, a_1|2v_0|^\nu\right) + \gamma\left(\alpha + \frac{1}{\nu}, a_1\nu|2v_0|^{\nu-1} \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \right\} \\
& - v_0 \cdot \frac{1}{a_1^\nu} \cdot \left\{ \gamma\left(\alpha + \frac{1}{\nu}, a_1|2v_0|^\nu\right) - \gamma\left(\alpha + \frac{1}{\nu}, a_1\nu|2v_0|^{\nu-1} \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \right\} \quad (5.102)
\end{aligned}$$

上式をまとめると

$$\begin{aligned}
J_1 &= 2v_0 \left( \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k} \right) \cdot \gamma(\alpha, a_1|2v_0|^\nu) \\
&+ \left( \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k} \right)^2 \cdot \gamma\left(\alpha, a_1\nu|2v_0|^\nu \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \\
&- \frac{1}{a_1^\nu} \cdot \gamma\left(\alpha + \frac{2}{\nu}, a_1\nu|2v_0|^{\nu-1} \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \\
&+ 2v_0 \cdot \frac{1}{a_1^\nu} \cdot \gamma\left(\alpha + \frac{1}{\nu}, a_1\nu|2v_0|^{\nu-1} \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \quad (5.103)
\end{aligned}$$

そして、これも  $J_1$  の虚数部のみをとると仮定すると、

$$J_1 = 2iv_0 \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k} \cdot \gamma(\alpha, a_1|2v_0|^\nu) \quad (5.104)$$

そうして(5.97)式の  $J_1$  と(5.100)式の  $J_2$  を高周波電界の(5.93)式に代入すると  $E(\mathbf{k}, p)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{k}, p) &= \Sigma_\alpha \frac{e_\alpha}{\varepsilon_0} \cdot \frac{i\mathbf{k}}{k^2} f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \cdot \frac{n_b}{5C_1|E|^2} \cdot \frac{1}{v_0} \cdot \frac{1}{\left\{ \frac{p+ic}{C_1|E|^2} \right\}^{\frac{1}{5}}} \\
&\times \left[ 2iv_0 \left( \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k} \right) \cdot \gamma(\alpha, a_1|2v_0|^\nu) - 2iv_0 \left( \frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k} \right) \cdot \gamma\left(\alpha, a_1 \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \right] \quad (5.105)
\end{aligned}$$

$\gamma$  を第一種不完全ガンマ関数という。 $J_1$  に於ける第一種不完全ガンマ関数をみてみると、

$$\gamma(\alpha, a_1|2v_0|^\nu) \simeq \gamma(\alpha, \infty) = \Gamma(\alpha) \quad (5.106)$$

次に公式より次のことが成り立つ。

$$\Gamma\left(\alpha, a_1 \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) = \Gamma(\alpha) - \gamma\left(\alpha, a_1 \left|\frac{iIm\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \quad (5.107)$$

したがって最終的に高周波電界の式  $E(\mathbf{k}, p)$  は次のように導かれる。

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{k}, p) &= -\sum_\alpha \frac{e_\alpha}{\varepsilon_0} \cdot \frac{i\mathbf{k}}{k^2} f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \cdot \frac{2}{5} n_b \\
&\times \left\{ \left( \frac{p+ic}{C_1|E|^2} \right)^{\frac{1}{5}} \left( \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k} \right) \right\} (p+ic)^{-1} \cdot \Gamma\left(\frac{8}{5}, \left| \frac{p+ic}{C_1|E|} \right|^{\frac{1}{2}} \left| \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k} \right|^{\frac{5}{2}} \right) \quad (5.108)
\end{aligned}$$

(5.108) 式を  $E$  についてまとめるともう一つの重要な結果である非線形分散式が得られる。

$$\begin{aligned}
1 + \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{\varepsilon_0} \cdot \frac{i\mathbf{k}}{k^2} f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \cdot \frac{2}{5} n_b \frac{1}{\{|E|^2\}^{\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ \left( \frac{p+ic}{C_1|E|^2} \right)^{\frac{1}{5}} \left( \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k} \right) \right\} (p+ic)^{-1} \\
\times \Gamma\left(\frac{8}{5}, \left| \frac{p+ic}{C_1|E|} \right|^{\frac{1}{2}} \left| \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k} \right|^{\frac{5}{2}} \right) = 0 \quad (5.109)
\end{aligned}$$

ここで、 $\Sigma_\alpha$  は自己エネルギー項である。 $E(\mathbf{k}, p)$  は  $p = -i\omega$  だから  $\omega$  の関数である。したがって、(5.108) 式のフーリエ変換をすると、

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{k}, t) &= \sum_\alpha \left( \frac{e_\alpha}{\varepsilon_0} \right) \left( \frac{i}{|\mathbf{k}|} \right) f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \cdot \left( \frac{4^q \cdot n_b v_0}{\pi^{\frac{1}{2}} \{C_1|E|^2 t\}^{\frac{3}{2}-q}} \right) \cdot \left( \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 t} \right) \\
&\times \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 t) \cdot \sinh\left(\frac{Im\Sigma_\alpha t}{2}\right) \cdot \Gamma\left(q, a_1 \left|\frac{Im\Sigma_\alpha}{2k}\right|^\nu\right) \quad (5.110)
\end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{4C_1|E|^2 t}, \quad q = 1.3, \quad \nu = 5$$

$$y \equiv \frac{\sqrt{\Sigma_\alpha} |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}}$$

$$D_{ij} = \frac{\Sigma_\alpha |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2}{y^2}$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{k^2} \cdot \frac{|E(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2}{\Sigma_\alpha |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^5} \cdot (1-y) \cdot e^y$$

$$|E|^2 = \frac{\Sigma_\alpha |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^5}{\frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot (1-y)y^2 \cdot e^y}$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{k^2}$$



以上が最終的な解析結果である。この (5.110) 式を実験でのパラメーターを代入して数値解析する。なお、 $y$  と  $|E|$  には適当なる定数を置いた。こうして、一応、理論から図 5.4 のような包絡ソリトンを得られることがわかった。主なパラメーターは次のようになる。

$$|E| = 0.1 \text{ (V)}, |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| = 1.0 \times 10^4 \text{ (m/s)}, y = 0.72, \gamma = 500$$

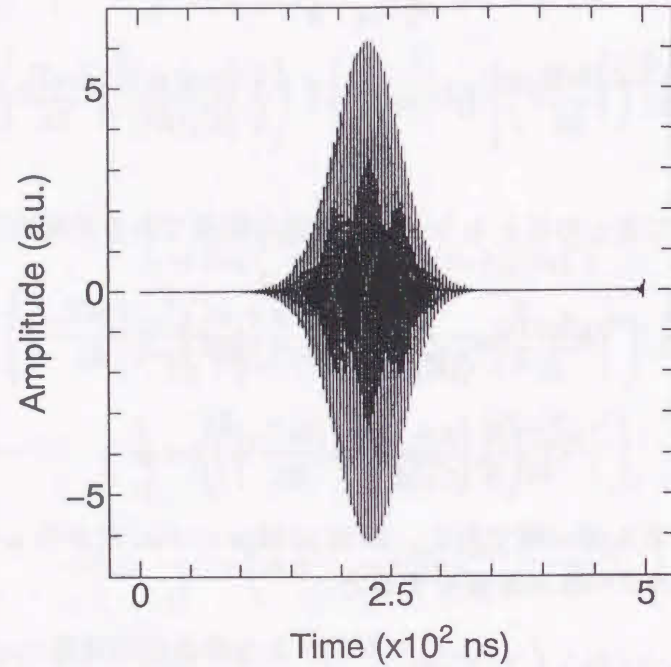


図 5.4: 包絡ソリトン

### 5.3.2 電子ビームの速度分布関数

電子ビームをプラズマに注入すると、ビーム・プラズマ相互作用を受け、ビームはソリトンを放出し、その反作用で緩和することは、以前にも述べた通りである。そこで、その現象のメカニズムの解明を行うに当たって、電子ビームの速度分布を調べることとする。電子ビームの速度分布関数は、基礎方程式に示される、 $f_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega)$  で計算することができる。

$$f_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \int d\mathbf{v}' G_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') f_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') \quad (5.111)$$

この (5.111) 式の遅延伝達関数 (Green 関数) も前節と同様、 $m = 0$  mode でのものを使用することにした。

$$G_\alpha^{(m=0)}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') = -\frac{i}{4\pi D_{ij}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \cdot \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\sqrt{D_{ij}}} \sqrt{i(-\omega + c)} \right\} \quad (5.112)$$

### 5.3. ソリトンの導出

ここで  $c = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i\Sigma_\alpha$  であり、 $D_{ij}$  は拡散係数であり、(5.113) 式となっている。

$$D_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{k_i k_j}{k^2} \cdot \frac{|E(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \cdot (1 - y) \cdot e^y \quad (5.113)$$

この拡散係数  $D_{ij}$  を、(5.112) 式にを代入し、Green 関数を書き換えた結果を (5.114) 式に示す。

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') = -\frac{i|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2}{2\pi c_1 |E|^2 (1 - y) e^y} \times \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} c_1 |E|} \sqrt{(1 - y) e^y}} \sqrt{i(-\omega + c)} \right\} \quad (5.114)$$

一方、電子ビームの初期の分布関数  $f_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{v}', p')$  は、(5.115) 式により表されることができる。

$$f_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') = f_1^{(0)}(\mathbf{k}') f_2^{(0)}(\mathbf{v}') \quad (5.115)$$

$f_1^{(0)}$  は空間的構造を決める変数  $\mathbf{k}'$  と時間に特に依存する場合 (初期値が) に必要な場合を考えて  $p'$  を一応入れておく。 $f_2^{(0)}$  は、ほぼ速度のみの関数で、次の形のものを考える。

$$f_2^{(0)}(\mathbf{v}') = c_{v_0}(v_0) \delta \left( \mathbf{v}' - \mathbf{v}_0 \pm \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k'} \right) \quad (5.116)$$

$\frac{Im\Sigma_\alpha}{2k'}$  は  $\frac{Im\Sigma_\alpha}{2}$  が resonance broadening (レゾナンス・ブロードニング) で広がられた周波数 (半分幅) であることから  $\frac{Im\Sigma_\alpha}{2k'}$  は、特定の (主となる) 波数  $\mathbf{k}'$  の伝搬する位相速度であり、電子ビーム速度が、初期速度  $\mathbf{v}_0$  から幅を持つてくるものとした。 $C_0(v_0)$  は、電子ビームの速度密度  $n_b$  に比例し、 $\delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_0 \pm \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k'})$  が 3 次元速度空間でのデルタ関数であることから、 $C_0(v_0)$  は速度の 3 乗の逆数に比例する量になっている。したがって、次のようになる。

$$\iiint C_0(v_0) \cdot \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_0 \pm \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k'}) d^3 v' = \int_0^\infty dv' \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi C_0(v_0) \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_0 \pm \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k'}) (v')^2 = n_b \quad (5.117)$$

または、

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x' \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y' \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z' C_0(v_0) \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_0 \pm \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k'}) \delta(v_x' - v_{0x} \pm \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k'}) \delta(v_y' - v_{0y} \pm \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k'}) \delta(v_z' - v_{0z} \pm \frac{Im\Sigma_\alpha}{2k'}) = n_b \quad (5.118)$$

によって  $C_0(v_0)$  を定義する。 $\frac{Im\Sigma_\alpha}{2k'}$  は少なくとも熱速度の分だけは存在する。このようにして得られた、Green 関数並びに、ビームの初期の分布関数を (5.111) 式に用いることにする。ここで、 $f_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega)$  の計算に於いて、 $G_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega; \mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega')$  が  $\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta(\omega - \omega')$  に比例していることに注意する。 $\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$  はクロネッカーデルタである。したがって  $\omega' \rightarrow \omega$ ,



$p' \rightarrow p, \omega' \rightarrow \omega$  としてよい。

$f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega')$  の中にある  $\delta(\mathbf{v}', -v_0 \pm \frac{Im\Sigma_{\alpha}}{2k'})$  によって,  $\int d\mathbf{v}'$  についての速度空間の積分の際,  $\mathbf{v}' \rightarrow v_0 \pm \frac{Im\Sigma_{\alpha}}{2k'}$  と置き換えてよい。 $\Sigma_{\alpha}$  は  $\Sigma_{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega)$  であり, 速度の関数ではあるが, この際  $\Sigma_{\alpha}$  の速度依存性は考えないものとする。 $(\frac{Im\Sigma_{\alpha}}{2k'})$  が  $v_0$  に比較して小さい量であるから。しかしながら有限である。) ここで, (5.117) 式の特徴を用いると,

$$\begin{aligned} \iiint f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{v}', \omega') d\mathbf{v}' &= \int_0^{\infty} dv' \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi C_0(v_0) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}' \pi \frac{Im\Sigma_{\alpha}}{2k'}) f_1^{(0)}(\mathbf{k}') \\ &= n_b f_1^{(0)}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (5.119)$$

となり, 裏領域での分布関数  $f_{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega)$  は

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega)|_{m=0} &= -i f_1^{(0)}(\mathbf{k}) \frac{n_b}{2\pi C_1 |E|^2 (1-y)e^y} \cdot \left| \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \pm \frac{Im\Sigma_{\alpha}}{2k} \right|^2 \\ &\times \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \pm \frac{Im\Sigma_{\alpha}}{2k}|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}C_1|E|\sqrt{(1-y)e^y}} \sqrt{i(-\omega + c)}} \right\} \end{aligned} \quad (5.120)$$

ここで, この (5.120) 式を逆ラプラス変換することにより, 任意の時間に於ける電子ビームの速度分布関数  $f_{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t)$  を求めることができる。逆ラプラス変換を行う際に, 以下の (5.121) 式, (5.122) 式なる公式を用い, 変換した。

$$L^{-1}[f(p - \beta)] = e^{\beta t} F(t) \quad (5.121)$$

$$L^{-1}[e^{-\alpha(p+ic)^{\frac{1}{2}}}] = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t}\right) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t} \quad (5.122)$$

この2つの公式を (5.120) 式に用いることにより, 任意の時間に於ける電子ビームの分布関数  $f_{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t)$  は

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) &\equiv L^{-1}[f_{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega)] \\ &= -\frac{i}{8\pi} f_1^{(0)}(\mathbf{k}) \cdot \frac{n_b}{\left\{ \frac{1}{2}C_1|E|^2(1-y)e^y \right\}^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(\pi^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{2}})} \cdot \left| \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \pm \frac{i\Sigma_{\alpha}}{2k} \right|^{\frac{5}{2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \pm \frac{i\Sigma_{\alpha}}{2k}|^{\frac{5}{2}}}{2c_1|E|^2(1-y)e^y \cdot t} \right\} \cdot \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 t) \cdot \exp(-Re\Sigma_{\alpha}t) \end{aligned} \quad (5.123)$$

と求めることができる。こうして求まった, 任意の時間に於ける電子ビームの分布関数  $f_{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t)$  の解析を行おう。ここで, 速度分布関数 (5.102) は, 電界  $|E|$  の項が含まれており, ビーム・プラズマ相互作用により放出されたソリトンの電界の影響を受けると考えられ

る。そこで, 時間的に一定の電界の値を考えるのではなく, 電界  $|E|$  の項にはソリトンの電界を考慮に入れ, 逐次, ソリトンの電界を  $f_{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t)$  に代入し, ビームの分布関数の解析を行う。

ビーム・プラズマ相互作用によるソリトンの放出と, 電子ビームの速度分布関数の緩和の相関を調べる上で, まず理論より得られるソリトンここで示す。図 5.5 では, 1920[V] で加速された電子ビームをプラズマに注入した場合を考えている。横軸に時間を, 縦軸にはソリトンの振幅を示している。振幅の単位は, Arbitrary Unit となっている。これは理論計算を行う際, 裏領域で計算を行ったためである。しかしながら, その特徴は, 立ち上がり時間が, 立ち下がり時間に比べ長くなっており, また, その包絡線は sech カーブとなっている。また, ソリトンの半値幅は, 0.02~0.03 $\mu$ s であり, 実験より得られたソリトンに比べ, 少し狭くなっているが, 特徴は非常に似通っており, 理想的なソリトンと思われる。図 5.5 に示されたソリトンは, 0.17~0.26 $\mu$ s にかけて放出されている。つまり, このソリトンを放出することによって, 電子ビームは 0.17~0.26 $\mu$ s にかけて, その運動エネルギーを失い, 緩和現象が起こるものと予想される。そこで, 0.17~0.26 $\mu$ s の時間帯に注目し, 分布関数が時間経過と共にどのように変化していくかを見ていくことにする。電子ビームの速度分布関数  $f_{\alpha}$  を解析する際には, 以前にも述べたように, ソリトンの電界が影響を及ぼしていると考えられる。そこで, 図 5.5 のソリトンの放出に伴う緩和現象を調べるにあたって,  $f_{\alpha}$  の電界  $|E|$  の項に, 図 5.5 に示すソリトンの電界 (包絡線) を代入し, 時間経過と共に分布関数がどのように変化するかを解析した。

その結果を, 図 5.6 に示す。図 5.6 は, 図 5.5 と同様の条件で, 1920[V] で加速された電子ビームをプラズマに注入した場合を考えている。横軸には速度を, 縦軸には解析された分布関数  $f_{\alpha}(v)$  を示している。今回, 1 個のソリトンの放出に伴う, 分布関数の時間的変化を調べているため, ビームの初速度  $v_0 \sim 2.599 \times 10^7$  [m/s] 付近で, 変化が起こっていた。そのため, 図 5.6 では, 初速度付近を中心に見ている。ソリトンが放出される以前には, 電子ビームの分布関数は, 初速度  $v_0 \sim 2.599 \times 10^7$  [m/s] でデルタ関数であることにまず気づく。そして, ビームの分布関数は Slow Wave (低エネルギー領域) と Fast Wave (高エネルギー領域) の2手にわかれ, それぞれスペクトルは広がり, Slow Wave は低エネルギー領域へ, Fast Wave は高エネルギー領域へと時間の経過と共に移行していることがわかる。ソリトンを放出するような場合には Slow Wave が非常に重要となる [38]。そこで, Slow Wave に注目すると, ビームの速度分布関数は, ソリトンの放出と共に, 電子ビームの分布関数は広がり, そして, 低い速度領域 (低エネルギー領域) に全体が移動していることがわかる。これらのことから, ビームはソリトンを放出し, 運動エネルギーを失い, ビーム電子はその反作用で, 緩和され, スペクトルの広がりと共に, 低エネルギー領域へと移行したと思われる。

一方, Fast Wave に注目する。このような, High Energy Tail が現れることは, 非常に興味深い。この High Energy Tail が現れた原因として, 以下のことが考えられる。ソリトンは, 3 次の電子プラズマ波の非線形結合により生成されと考えられる。3 次の非線形結合により,  $\omega, 2\omega, 3\omega, -\omega, -2\omega, -3\omega$  そして, 直流の波が生成されと考えられる。つまり, 今回現れた, High Energy Tail は, 非線形結合により発生された高周波成分が現れているのではないかと考えられる。



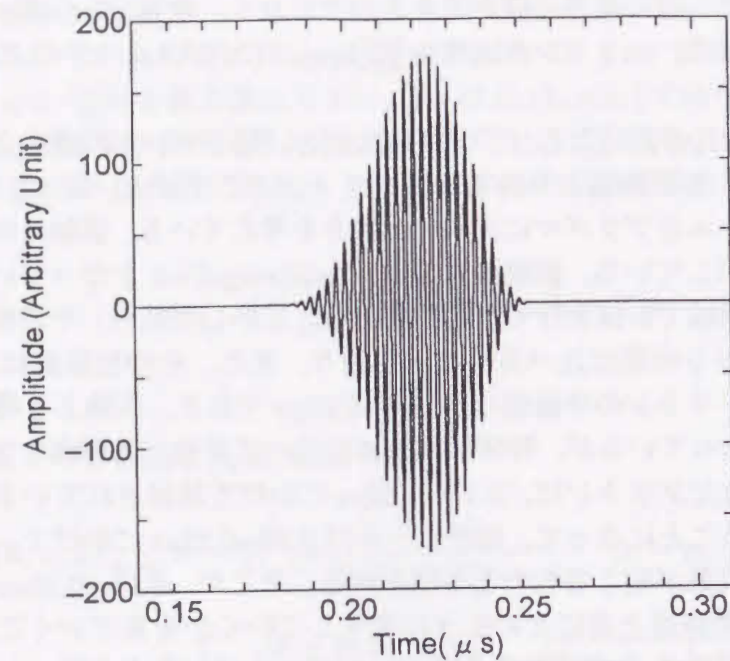


図 5.5: 計算で得たソリトンの一例

### 5.3.3 電子ビームの Stopping Power

電子ビームが Ar ガスを電離させるような電子ビーム・プラズマ系を考える場合には、電子励起を伴う非弾性散乱による電子的阻止能 (Electronic Stopping Power) が主要と考えられる。そこで、この節では、前節で求めた分布関数を応用し、ソリトンの放出に伴う、ビームの Electronic Stopping Power を計算し、そのメカニズムを考えることにする。

Stopping Power を求める方法として、まず (5.124) 式を用いて、 $dt[s]$  の時間経過と共に Beam 粒子のエネルギー変化  $dW$  を調べる。

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \frac{mv^2}{2} f(v, t) d^3v \right\} \quad (5.124)$$

ここで、 $f(v, t)$  の時間変化を記述する準線形理論の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v) = \frac{\partial}{\partial v} \cdot D \cdot \frac{\partial}{\partial v} f(v) \quad (5.125)$$

である [17]。 (5.104) を (5.103) に用い、部分積分を行うことにより、 $\partial W/\partial t$  を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \int \frac{mv^2}{2} \left\{ -\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} \right\} d^3v \\ &= \int mv \cdot D \cdot \frac{\partial}{\partial v} f(v) d^3v \end{aligned} \quad (5.126)$$

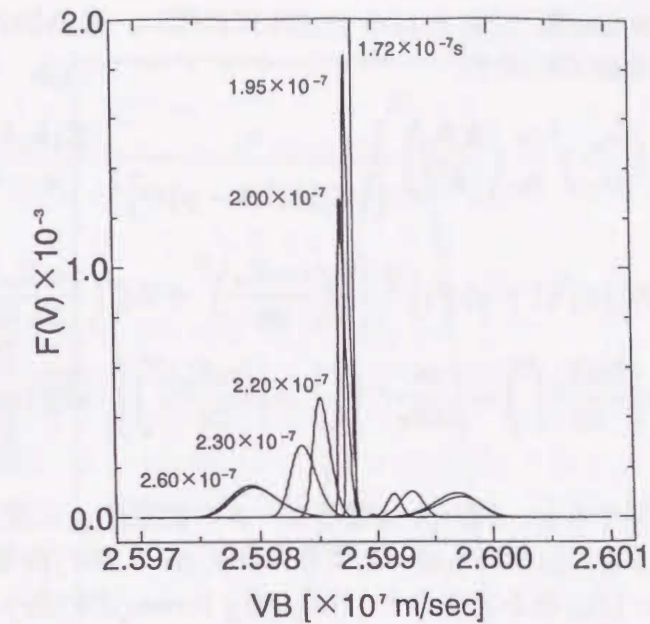


図 5.6: 電子ビームの速度分布緩和

ここで、Stopping Power とは一般に、 $\partial W/\partial x$ 、つまり、 $dx[m]$  進む毎の Beam 粒子のエネルギー変化量  $dW$  であることより、Stopping Power は  $\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{\partial W}{\partial t}$  となり、(5.127) 式から求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \int m \frac{v}{v} \cdot D \cdot \frac{\partial}{\partial v} f(v) d^3v \\ &= \int m \hat{v} \cdot D \cdot \frac{\partial}{\partial v} f(v) d^3v \end{aligned} \quad (5.127)$$

ただし、 $\hat{v} : v$  の単位ベクトルである。Stopping Power は一般に  $\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{\partial W}{\partial t}$  であると述べたが、前節で述べたビームの速度分布関数の解析結果からスペクトルの速度変化は、ビームの初速度に比べ、非常に小さな値となっており、 $v \simeq v_0$  と近似ができる。そこで、今回  $\partial W/\partial t$  を Stopping Power として、解析を進めることにした。(5.127) 式に用いる分布関数  $f_\alpha(k, v, t)$  として、前節で求めた (5.128) 式を利用し、解析を行っていく。

$$\begin{aligned} f_\alpha(k, v, t) &= -\frac{i}{8\pi} f_1^{(0)}(k) \frac{n_b}{\left\{ \frac{1}{2} C_1 |E|^2 (1-y) e^y \right\}^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(\pi^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}})} \cdot \left| v - v_0 \pm \frac{i \Sigma_\alpha}{2k} \right|^{\frac{3}{2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{|v - v_0 \pm \frac{i \Sigma_\alpha}{2k}|^2}{2 C_1 |E|^2 (1-y) e^y \cdot t} \right\} \cdot \exp(-ik \cdot v_0 t) \cdot \exp(-Re \Sigma_\alpha t) \end{aligned} \quad (5.128)$$



上式のビームの速度分布関数  $f_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t)$  を (5.12) 式に用い、最終的に得られた Stopping Power である  $\partial W/\partial t$  を以下に示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & f_1^{(0)} \frac{1}{(\pi t)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{m}{v_0} \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_j}{k^2} \right) \frac{n_b}{\left\{ \frac{1}{2} C_1 |E|^2 (1-y) e^y \right\}^{\frac{3}{2}}} \frac{|E(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} (1-y) e^y \\ & \times \left\{ 2 C_1 |E|^2 (1-y) e^y t \right\}^{\frac{11}{10}} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{Im \Sigma_\alpha}{2k} \right)^3 + 2 v_0^2 \left( \frac{Im \Sigma_\alpha}{2k} \right) \right] \\ & \times \left[ \frac{i}{16\pi} \Gamma \left( \frac{21}{10}, \alpha \left| \frac{Im \Sigma_\alpha}{2k} \right|^5 \right) - \frac{9i}{160\pi} \Gamma \left( \frac{11}{10}, \alpha \left| \frac{Im \Sigma_\alpha}{2k} \right|^5 \right) \right] \cdot \exp(-Re \Sigma_\alpha t) \quad (5.129) \end{aligned}$$

上式の  $\partial W/\partial t$  に注目すると、 $\partial W/\partial t$  は電子ビームの初速度  $v_0$  に反比例している。ここで、 $\partial W/\partial x$  に振り返ると、以前にも述べたように  $\partial W/\partial x$  と  $\partial W/\partial t$  関係は、 $\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial W}{\partial t}$  である。ここで  $1/v \simeq 1/v_0$  をふまえると、Stopping Power ( $\partial W/\partial x$ ) は  $1/v_0^2$  に比例するということになる。つまり、注入するビームの速度が速ければ、速いほど Stopping Power の作用は小さくなる。この特性は、固体に於ける阻止能公式として有名な、Bethe の阻止能公式 [1] (阻止能は  $v^{-2} \ln(v^2)$  に比例する。) の特徴にもよく似ている。

得られた Stopping Power ( $\partial W/\partial t$ ) を数値的に解析し、ソリトンの相関関係を調べることにする。Stopping Power もビームのスペクトルと同様、放出されたソリトンの電界の影響を受けると考えられる。そこで、 $\partial W/\partial t$  を計算する際には、電界の項 ( $|E|$ ) に、ソリトンの電界を用いて解析を行った。その結果を図 5.7 に示す。図 5.7 と図 5.5 を見比べると、Stopping Power は、放出されるソリトンとカップリングしていることがわかる。つまり、ソリトンが立ち上がる、 $0.17\mu s$  に、Stopping Power も作用し始め、ソリトンの放出が終わる  $0.26\mu s$  には、Stopping Power もその作用が終わっている。また Stopping Power の大きさは、ソリトンの振幅の大きさに比例していることもわかる。立ち上がり部分に注目すると、若干ではあるが、Stopping Power の立ち上がりはソリトンの立ち上がり比べ、遅れている。これはプラズマの持つ誘電的性質による、応答遅れであると考えられる。今回解析を行った、電子ビームの速度分布関数、並びに Stopping Power の緩和時間は非常に短い時間  $0.1\mu s$  で起こっていることがわかる。一般に、クーロン衝突による平均自由時間は次式で表される [37]。

$$\tau \equiv \frac{\Lambda}{\omega_{pe}} \quad (5.130)$$

ここで、 $\Lambda$  はプラズマパラメータ、 $\omega_{pe}$  はプラズマ周波数である。ここで、プラズマ密度  $10^{14} m^{-3}$ 、プラズマ温度  $3[eV]$  の時に於ける、平均自由時間は  $25[\mu s]$  となり、今回解析を行った結果、緩和時間の 250 倍となっている。これは、プラズマ粒子同士が波動を介して相互作用する協調運動の結果であり、異常緩和、異常衝突と呼ばれるものである。

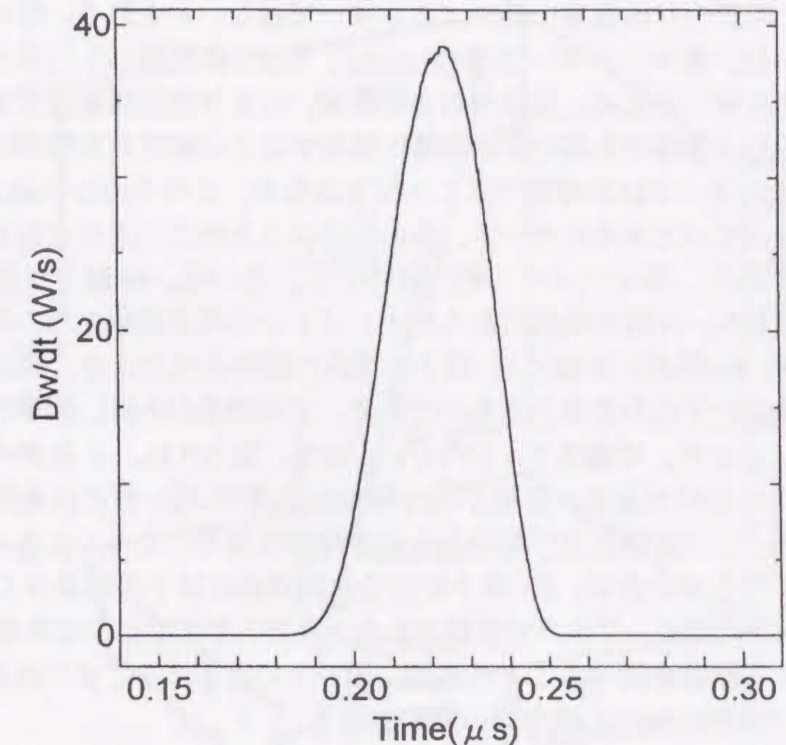


図 5.7: 電子ビームに対する阻止能

## 5.4 結晶中のイオン波ソリトン

電子ビーム中のイオン波ソリトンと固体結晶中のソリトンとは、無関係と思われるが、力学系として見たときは、共通な性質を持つと考えられる。結晶すなわち非線形のパネで結ばれたシステムに於ける、例えば、Fermi-Pasta-Ulam の再帰現象はソリトンの発見 (命名) につながった歴史がある。連続体ではなく、有限個の原子の振る舞いは、高速計算機の利用が可能で、ある程度の原子数で、直接的に、その運動を計算することは、プラズマ中の波動の性質を知る上で、別の見方として、参考になるであろう。もちろん、結晶自体の性質を理解するのは興味あることである。ここでは、鉄の結晶中に低エネルギーの He を打ち込んだ場合をとり上げるが、これは、実際的には、核融合研究に於ける粒子対壁相互作用問題である。計算は基本的に Beeler による動力的方法 [47] で行い、その際用いる原子間ポテンシャルは、Fe-Fe については Johnson によるもの [9]、Fe-He については Wilson-Johnson によるもの [26] を用いる。これまで、He によって鉄原子がはじき出される格子欠陥 (Schottky 型、及び Frenkel 型) に要するエネルギーに関しては、相当高いエネルギーが必要とされている。例えば、displacement energy  $E_d$  は bcc  $\alpha$ -iron に対しては  $17eV$  [55] とされており、また  $\alpha$ -iron の Frenkel 欠陥に必要なエネルギーは、文献によると、 $17eV \sim 60eV$  の隔たりが存在する。これに対して我々のグループでは、 $13.76eV$  の



He を Fe-結晶の Fe(100) 面に入射した時に起こるカスケード衝突を発表したが [70], He-原子と Fe-原子との質量比を考慮すると, 非常に少ないエネルギーで起きる結果を得た。したがって, このデータは世界一低いエネルギーではないかと思う。他の多くのデータとの主たる違いは, 高エネルギー方面 (Ecstein) では二体問題として考えるに対し, 今回のものは低エネルギーのため, 結晶内の多体衝突, つまり遠距離衝突を主体にとり入れる点にある。ただし, 多体でも常時4体問題に相当するこの衝突の特徴は時間をかけることにある。高エネルギーでは短時間ではじき出されるが, この Fermi-Pasta-Ulam の再帰現象では, 一度持っていたエネルギーが, 他の粒子にとられてしまった後でも, 多体相互作用によって, やがて, 非エルゴード的に再帰する。その時, Fe 原子は格子から抜け出すのである。すなわち, 非線形振動である格子ソリトンの再帰現象を取り扱っていることになる。図 5.8 は, Fe 結晶の表面に He 原子を垂直に衝突させたとき, 結晶内部の原子位置が時間的にどう変化するかを示したものである。この結果からは, 衝撃の伝搬速度を求めることができ, およそ, 音速  $8.7 \times 10^3 \text{ m/s}$  になる。図 5.9 は, カスケード衝突の様子を3次元的に示したものである。各格子点の周りの黒丸は, Fe-原子の軌跡を示し, その周囲をしばらく廻っている間に上げ潮のように多体相互作用によってエネルギーが回復して来ることを表す。そのときに, Fe-原子がはじき出されて格子欠陥を生じることになる。

本来は, 結晶ではなく, プラズマ状態であるときの入射粒子による振動状態, すなわち, イオン波に与える影響を調べることを念頭に置いていたが, そこまでは至らず, プラズマ中のソリトンの調査については今後の課題とする。

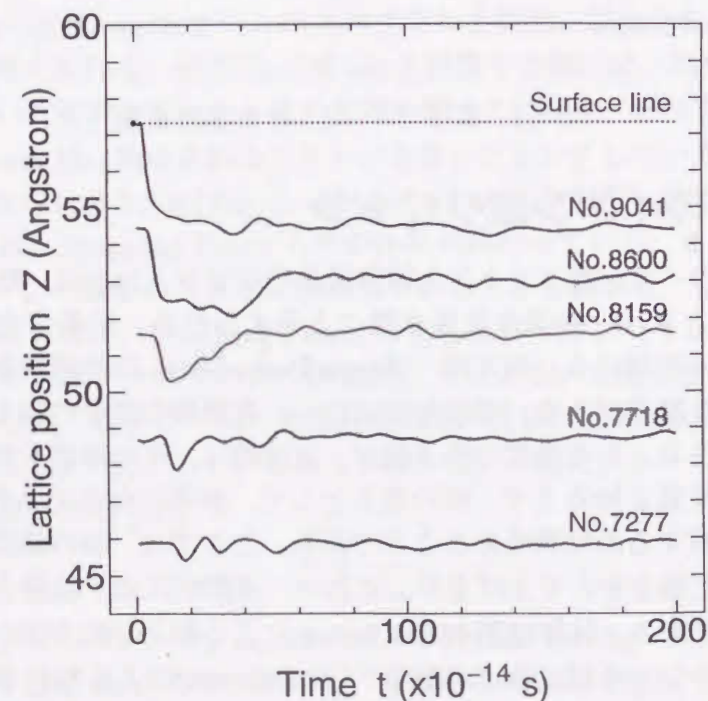


図 5.8: Fe 結晶表面に He 原子 (9.17eV) を垂直に衝突させたときの結晶原子位置 (垂直) の時間変化 格子定数 =  $2.86645 \text{ \AA}$ , 結晶サイズ = 結晶格子数は  $20 \times 20 \times 20$ , 格子温度 = 0.02eV, No.8600 は格子欠陥を生じている。

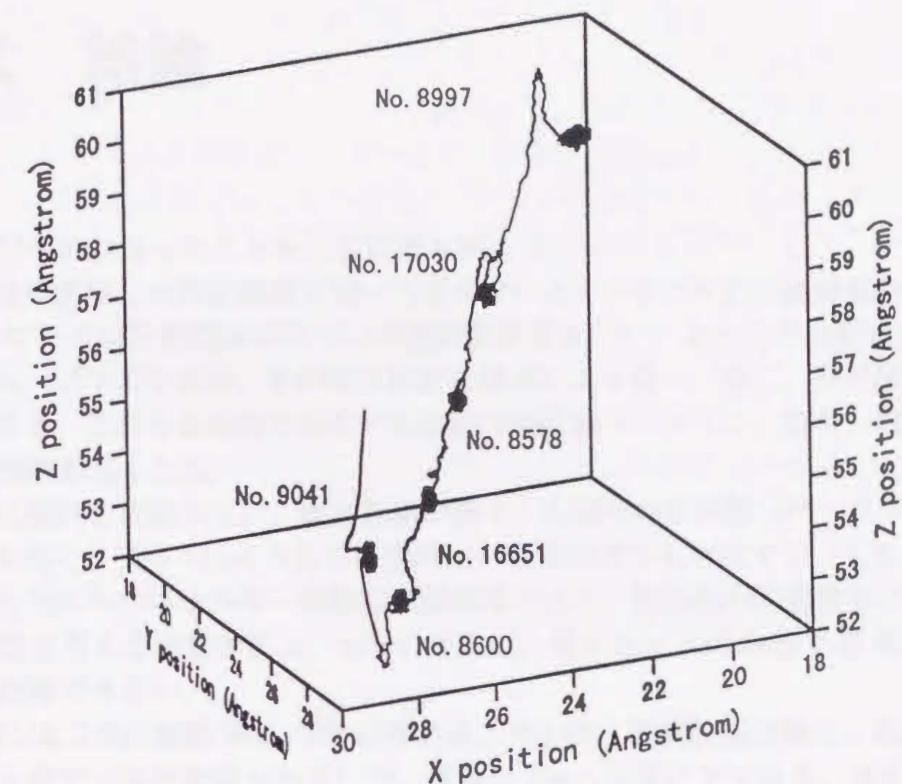


図 5.9:  $\alpha$ -Fe 結晶中のカスケード衝突 (3次元表示) の一例 格子定数 =  $2.86645 \text{ \AA}$ , 結晶サイズ = 結晶格子数は  $20 \times 20 \times 20$ , 格子温度 = 0.02eV



## 第6章 結論

本研究で明らかになったことをここにまとめよう。

第一は、近年進歩した測定機器を用いた電子ビーム・プラズマ系の波動実験及び計算機による T-G モードの分散関係式についての複素数計算を行い、それらを比較検討した。

電子ビーム・プラズマ系は、その相互作用の強さにより第一、第二、第三段階という三つの状態がある。これら各段階に発生する波動の周波数スペクトル、波長、偏波にはそれぞれ固有の特徴が見られる。

第一段階に現れる波動 W0 は、周波数幅が狭く、右回りの定在波（バースト波）であって、波長は大きく、長さ 45cm の真空容器内に一波長程度でも存在する。したがって、電子ビームから W0 へのエネルギー移動は集群作用でなく、定在波の減速電界にうまく同期する別の原理を考える必要がある。W0 の波長は、電子ビームのある T-G モードの分散関係式では計算できない。

第二段階には二つの波動 W1, W2 が現れる。W1 は、周波数幅は狭く、右回りの進行波（バースト波で一部反射波もある）で、波長は 10cm 程度以下である。W2 は、周波数幅が狭く、軸対称、右回り、左回り波（いずれもバースト波）の三種類が入り混じっている。これらはすべて、T-G モードの線形分散関係式を計算した結果から説明できる。

第三段階に現れる波動（バースト波ではない）は、周波数幅が広く、非線形性が強い。第三段階は、実験の困難さもあり、本研究では対象外としたが、第二段階の理解により、波動成長率が急激に大きくなる軸対称 T-G モードが、この第三段階への引き金になることは明らかである。

T-G モードの分散関係式を複素数で計算して初めてわかったのはその波動成長率である。すなわち、プラズマ密度が低ければ、電子ビームの S.S.C.W. により励起（A 領域）される右回り波（ $n = +1$  で W1 に対応）が大きく、中程度ならば、S.C.W. に励起（B 領域）される軸対称、右回り、左回り（ $n = 0, \pm 1$  で W2 に対応）が大きい。プラズマ密度がさらに高ければ、電子ビームの S.S.C.W. に励起（A 領域）される軸対称波（ $n = +1$ ）が最も大きくなり、かつこれは、他のものに比べてきわめて安定なものである。第二段階はこの波動成長率の大きいものがそのまま現れている。電離によるガス圧力変動の影響と、この T-G モードの性質からはバースト波である理由もわかる。

以上のことから、電子ビーム・プラズマ放電を開始させているのは、電子ビームの S.S.C.W. によって励起される T-G モードの軸対称波であると結論しよう。

第二は、非線形理論についてのものである。実験で得た周波数スペクトルを見れば、第二段階までは、線形性が強いがそれでも、非線形性の片鱗は十分ある。そこで、非線形理論でどの程度扱えるものなのかを試みた。もちろん、境界条件を入れて計算することは現在



のところ複雑なため考えには入れていない。初めに、実験で観測されるイオン波と高域混成波の相互作用をブラソフーポアソン系の方程式を基礎として、逐次近似法により2次までの解計算を行ったが、計算項の多さのため、電子ビーム・プラズマ系に応用することはできず、単に、基礎数式をしてまとめるにとどまった。しかし、ブラソフーポアソン系の方程式を別の手法である繰り込みによる計算を試みたところ、一部のパラメータに実験値を用い換えるが、一応、実験で観測されるソリトンの波形を計算することができた。また、イオン波が重要という認識のもとに、力学系のよく似た結晶モデルで、シュミレーション計算によりその性質を調べたが、その過程で副産物として、格子欠陥を生じさせるエネルギーとしてこれまでにない低い値を得ることになった。

さて、最後に、電子ビーム・プラズマ系の波動不安定性、特に、電子ビーム・プラズマ放電を真に理解するための、今後の研究についての方向である。本研究の結果、ガス圧力が低い電子ビーム・プラズマ系に励起される波動はT-Gモードの波動であることが明らかになったが、これを非線形理論により発展させなければならない。そのためには、境界条件を考慮した非線形方程式の解析法を確立する必要がある。もう一つはその解析結果を確かめる実験で、ごく最近の測定機器の進歩により、ようやく、電子ビーム・プラズマ系の第三段階に於ける高周波波形の実時間観測が十分可能となっており、ぜひとも、より詳しい調査を進めなければならない。

## 参考文献

- [1] H.A. Bethe ;Ann Phys.(Leipzig) **5**, 325, 1930.
- [2] Ira B.Bernstein, "Waves in a Plasma in a Magnetic Field," Phys.Rev., **109**, 1, pp.79-90, January 1958.
- [3] A.W.Trivelpiece, R.W.Gould, "Space Charge Waves in Cylindrical Plasma Columns," J.Appl.Phys. **30**, pp.1784-1793, November 1959.
- [4] P.A.Sturrock, Amplifying and Evanescent Waves, Convective and Nonconvective Instabilities, Plasma Physics, J.E.Drummond ed. McGraw-Hill, New York, 1961, Chapter 4.
- [5] B.D.Fried, S.D.Conte, The Plasma Dispersion Function, Academic Press, 1961.
- [6] L.D.Smullin, W.D.Getty, "Beam-Plasma Discharge: Buildup of Oscillations," J.appl.Phys **34**, pp.3421-3429, December 1963.
- [7] J.Lindhard and A.Winter; K.Dan. Vidensk. Selsk. Mat. -Fyz. Medd.**34**, No.4,1964.
- [8] R.J.Briggs, "Electron-Stream Interaction with Plasmas" in Research Monograph No.29,M.I.T.Press, Cambridge, 1964.
- [9] R.A.Johnson; Phys. Rev. **134**, A1329, 1964.
- [10] T.O'Neil, "Collisionless Damping of Nonlinear Plasma Oscillations", Phys. Fluids **8**, 12,6-22, 1965.
- [11] T.Tamano,"Observation of a Non-Convective Instability in a Beam-Plasma System", J.J.Appl.Phys. **4**, 12, pp.987-991,1966.
- [12] I.M.Al'tshul and V.I.Karpman; Sov.Phys.JETP **22**,361,1966.
- [13] T.H.Dupree; Phys. Fluids **9**,1773,1966.
- [14] T.Yamamoto, Kohji Ohniwa,H.Akimune and T.Suita,"Nonlinear Phenomena in Beam-Plasma Interaction", J.Phys.Soc.Japan **22**, 1, pp.277-284, 1967.
- [15] R.W.Gould, T.K.O'Neil, and J.H.Malmberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 219, 1967.



- [16] T.M.O'Neil, R.W.Gould, *Phys. Fluids* **11**, 134, 1968.
- [17] R.Z. Sagdrev and A.A. Galeev ; *Nonlinear Plasma Theory*, Benjamin, New York, pp.43-54,1969.
- [18] J.Weinstock; *Phys. Fluids* **12**,1045,1969.
- [19] J.Y.Wada, R.C.Knechtli,"Collisionless Thermalization of Electrons in a Beam-Plasma System", *Phys. Fluids* **12**, 7, pp.1497-1506, 1969.
- [20] J.H.Malmberg, C.B.Wharton, "Spatial Growth of Waves in a Beam-Plasma Systems", *Phys. Fluids* **12**, 12,1532-1541, 1969.
- [21] J.A.C.Cabral, H.J.Hopman, "Correlated beam distribution functions at the transition 1st-2nd regime in a beam-plasma experiment," *Plasma Phys.* **12**, pp.759-777, 1970.
- [22] K.Yatsui,Y.Yamamoto,K.Saeki,A.Hasegawa, "A Study of Beam-Plasma Discharge. I. Wave Characteristics," *J.Phys.Soc.Jn.*, **28**, 2, 489-495, 1970.
- [23] J.R.Thompson, "Nonlinear Evolution of Collisionless Electron Beam-Plasma Systems", *Phys. Fluids* **14**, 7,1532-1541, 1971.
- [24] B.B.Kadomtsev,O.P.Pogutse,"Theory of Beam-plasma Interaction", *Phys. Fluids* **14**, 11, 2470-2475, 1971.
- [25] N.G.Matsiborko, I.N.Onishchenko, VV.D.Shapiro and V.I.Shevchenko, "On Non-Linear Theory of Instability of a Mono-Energetic Electron Beam in Plasma", *Plasma Phys.***14**, pp591-600, 1972.
- [26] W.D.Wilson, R.A.Johnson;Rere gas in metals, in: Gehlen et al, pp.375-390, 1972.
- [27] J.B.McBride, E.Ott, J.P.Boris, J.H.Orens, "Theory and Simulation of Turbulent Heating by the Modified Two-Stream Instability", *Phys. Fluids* **15**, 12, 2367-2383, 1972.
- [28] R.C.Davidson, "Methods in Nonlinear Plasma Theory", Academic Press, 1972.
- [29] N.A.Krall, A.W.Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, New York, MaGraw-Hill,1973.
- [30] R.A.Demirkhanov, A.K.Gevorkov, A.F.Popov and O.A.Kolmakov, "Investigation of the Mechanism of Heating of the Plasma Electron Component under Two-Stream Instability Conditions in a Mirror Trap", *Soviet Physics JETP* **36**, 5,pp.874-879,1973.
- [31] M.Kono and Y.H.Ichikawa; *Prog.Theor.Phys.***49**,754,1973.

- [32] N.A.Krall, A.W.Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, McGrawHill Book Company, 1973.
- [33] K.Mizuno, S.Tanaka,"Nonlinear Wave-Particle Interaction in a Weak Cold Beam-Plasma System", *J.Phys.Soc.Japan* **35**, 6, pp.1753-1761,1973.
- [34] K.W.Gentle, J.Lohr, "Experimental determination of the nonlinear interaction in a one dimensional beam-plasma system", *Phys. Fluids* **16**, 9,1464-1471, 1973.
- [35] A.Hasegawa,"Decay of a Plasmon into Two Electromagnetic Waves", *Phys. Rev. Lett.***32**, 15,pp.818-820,1974.
- [36] A.Hasegawa, *Plasma Instability and Nonlinear Effects*. Berlin: Springer, 185,1975.
- [37] A.Hasegawa; *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects*, Spring-Verlag Berlin Heidelberg New York, pp. 4-5, 1975.
- [38] A.Hasegawa; *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects*, Spring-Verlag Berlin Heidelberg New York, pp.17-26, 1975.
- [39] R.Jones, W.Carr,M.Seidl, "Transition from particle trapping to a quasi-linear-like beam-plasma system", *Phys. Fluids* **19**, 4,548-553, 1976.
- [40] J.A.C.Cabral, "Nonlinear space-time evolution of the electron cyclotron instability in a beam-plasma experiment," *Plasma Phys.* **18**, pp.719-735, 1976.
- [41] C.J.Brakenhoff, A.Baan,T.Matitti, "Propagation of surface waves and instability wave growth in an ion beam-plasma system", *Plasma Phys.* **15**, pp.157-169, 1976.
- [42] K.Ohya, I.Mori, "Stopping Power of Plasma in a Beam-Plasma System", *J.Phys.Soc.Jpn.*,**43**,3,1048-1053,1977.
- [43] Nyajima, M.Oikawa, J.Satsuma and C.Namba,*J.Phys.Soc.Jpn.* **45**,643, 1978.
- [44] T.Watanabe, "Efficient Computation of the Plasma Dispersion Function  $Z(\zeta)$ ," Research Report, HIFT-12, May 1979.
- [45] K.Ohya,I.Mori, "Nonlinear Behavior of High Frequency Electric Field just Before the Initiation of Beam Plasma Discharge," H.Kikuchi(ed.), *Relation between Laboratory and Space Plasmas*, 87-96, D.Reidel Publishing Company, 1981.
- [46] C.W.Horton; Renormalized Plasma Turbulence Theory; in '*Long time Prediction in Dynamics*' ; ed. C.W.Horton, L.E.Reicle, V.G.Szebehely; John Wiley, 311,1983.
- [47] J.R.Beeler; *Radiation Effects Computer Experiments*; North-Holland; Amsterdam 1983.



- [48] A.Y.Wong and P.Y.Cheng, Phys. Rev. Lett. **52**, 1222, 1984.
- [49] T.Intrator, C.Chan, N.Hershkowitz and D.Diebold, Phys. Rev. Lett. **53**, 1233, 1984.
- [50] P.Y.Cheung, A.Y.Wong, Phys. Fluids **52**, 1538, 1985.
- [51] I.Mori, "Characteristics and structure of an axially symmetric plasma echo", Phys. Fluids **28**, 11, 3269-3279, 1985.
- [52] I.Mori, K.Ohya, "Induced Scattering of Plasma Electrons By Upper Hybrid Solitons", IEEE Trans. on Plasma Science, Vol.PS-14, No.3, 261-266, 1986.
- [53] I.Mori, "New method of observing nonlinear waves in a plasma", Rev.Sci. Instrum. **57**, pp.566-571, 1986.
- [54] I.Mori, K.Ohya, "Emission of an upper-hybrid-wave soliton from an ion wave in a beam-plasma system," Phys.Rev.Lett., **59**, 16, pp.1825-1828, October 1987.
- [55] Computer Simulation of Ion-Solid Interaction, Springer, Ecstein, 1991.
- [56] J.A.C.Cabral, L.M.Lapão, J.T.Mendonça, "Nonlinear Trivelpiece-Gould waves: Recurrence, harmonic cascade, and sidebands," Phys.Fluids, **B5**(3), pp.787-795, March 1993.
- [57] I.Mori, T.Morimoto, "Characteristics and Structure of an Upper-Hybrid Wave Soliton Generated in a Beam-Plasma System", Proc.ICPIG XXI, 149-150, Bochum, Germany, 11-16 Sep., 1993.
- [58] I.Mori, T.Morimoto, S.Mitiue, K.Tominaga, "BEAM PLASMA DISCHARGE: AN EMPIRICAL ACCOUNT", Proceeding of the SECOND URSI-ICPIG-RIDEN SYMPOSIUM, Wako, Japan, Sep., 1995.
- [59] I.Mori, T.Morimoto, S.Mitiue, K.Tominaga, "Characteristics and Structure of a Beam-Plasma Discharge", Proceeding of the International Conference on Gas Discharges and Their Applications, vol.2, pp.474-477, Sep., Tokyo, Japan, 1995.
- [60] T.Morimoto, I.Mori, "Two waves in a beam-plasma system at low pressures," Proc.ICPIG XXI, Vol.I, pp.202-205, Nagoya, Japan, September 1996.
- [61] I.Mori, T.Morimoto, R.Kawakami, S.Hasebe, K.Tominaga, "Multi-Dimensional Solitons and its Contribution to Beam-Plasma Discharge", Proc. of Int. Conf. on Plasma Physics, pp.766-769, Nagoya, Japan, Sep., 1996.
- [62] I.Mori, T.Morimoto, R.Kawakami, K.Tominaga, "Coherent Structure Emitted by an Electron Beam in a Beam-Plasma System," Proc.ICPIG XXII, Vol.IV, pp.266-267, July 1997.

- [63] K.Yamagiwa, I.Itoh and T.Nakayama, "Nonlinear Wave Phenomena in an Electron-Beam Plasma," J.PHYS IV FRANCE 7 (1997), C4-413, Colloque C4, Supplément au Journal de Physique III d'octobre 1997.
- [64] I.Mori, T.Morimoto, "Structure of Multi-dimensional Soliton and Generation of Caviton in the Nonlinear Beam-Plasma System", : 9th Int. Toki Conf., Toki, Japan, 1998, to be published in JPFR Series Vol.2.
- [65] T.Morimoto, I.Mori, "Growth Rates of Trivelpiece-Gould Modes in a Magnetized Beam-Plasma System," Proc.ICPIG XXIV, Vol.IV, 81-82, Warsaw Poland, 11-16 July 1999.
- [66] I.Mori, T.Morimoto, R.Kawakami, K.Tominaga, "Detection of Particle-Like Wave-Packets by Using a Time of Flight Method of an Envelope Solitons", Proc. of Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, pp.73-74, Warsaw, Poland, Jul., 1999.
- [67] "Anomalous electronic stopping and relaxation in the plasma and application of its theory to beam-surface interaction", I.Mori, T.Morimoto, R.Kawakami and K.Tominaga: Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 153, pp.31-35, 1999.
- [68] I.Mori, T.Morimoto, R.Kawakami, K.Tominaga, "Cascade collision of Fe-Atom caused by low energy He-incidence and effect of temperature to the type of defect", Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 153, pp.126-129, 1999.
- [69] I.Mori, T.Morimoto, R.Kawakami, K.Tominaga, "Wave Coupling between an Envelope Soliton and an Ion Wave in a Nonlinear Beam-Plasma Interacting System," Proc.ICPIG XXIV, Vol.IV, 155-156, Warsaw Poland, 11-16 July 1999.
- [70] I.Mori et al; Cascade Collision of Fe-Atom Caused by Low Energy He-Incidence and Effect of Temperature to the Type of Defect; Nuclear Instruments and Method in Physics Research B, 1999.
- [71] 森口繁一, 宇田川, 一松信, "数学公式 III," 岩波書店, 1960.
- [72] F.F. チェン (内田岱二郎 訳), "プラズマ物理入門", 丸善, 1977.
- [73] V.E. グラント, A.P. ジリンスキー, I.E. サハロフ (下條隆嗣, 田井正博 訳), "プラズマ物理学の基礎", 現代工学社, 1983.
- [74] 森, 長井, 大宅, "プラズマの非線形波動の粒子的観測法", 徳島大学工学部研究報告, 第 31 号, 45-51, 1986.
- [75] 森, 大宅, "磁界中のプラズマに発生する非線形波動について", 電磁界理論研究会資料 (電気学会) EMT-86-103, pp.29-37, 1986.



- [76] 山際啓一郎, 三重野哲, 徳田勝彦, 川又祐一, プラズマ研究会資料 (電気学会) EP-88-65, 45, 1988.
- [77] 森, 大宅, "プラズマ波とイオン波の相互作用", プラズマ研究会資料 (電気学会) EP-88-70, pp93-102, 1988.
- [78] 河野, "不安定発展における非線形効果—秩序形成とカオス—", 核融合研究 第60巻第1号, 講座, 31-46, 1988.
- [79] 安藤, 藤田, "電子ビームを流入した低気圧気体の放電開過程", 電学論 A, 109, 4, 講座, 141-148, 1989.
- [80] 森, 大宅, "不均一プラズマ中の高域混成波の伝搬と波による電子の散乱", 電気学会, プラズマ研究会資料, EP-89-67, 1989.
- [81] 森, 大宅, "高域混成波の崩壊不安定性によって生じるイオン波について", 電気学会, プラズマ研究会資料, EP-89-68, 1989.
- [82] 宮本健郎, "プラズマ物理入門", 岩波書店, 1991.
- [83] 本沢, "イオンビーム・プラズマ系における非線形波動現象", 核融合研究 第67巻第4号, 講座, 336-343, 1992.
- [84] 市川, "プラズマのソリトンとカオス", 日本物理学会誌 Vol.47, No.7, 531-538, 1992.
- [85] 山際, 田中, "電子ビーム・プラズマ系における非線形波動現象", 核融合研究 第67巻第5号, 講座, 412-417, 1992.
- [86] 菅谷, "ビーム系の非線形ランダウ減衰", 核融合研究 第67巻第5号, 講座, 418-421, 1992.
- [87] 川原, "ソリトンからカオスへ—非線形発展方程式の世界—", 朝倉書店, 1993.
- [88] 須川, 菅谷, 磯部, Atul Kumar, "電子ビームによるプラズマ生成過程", 電気学会, プラズマ研究会資料, EP-95-7, 1995.
- [89] T.H. スティクス (田中繁利, 長 照二 訳), "プラズマの波動 (上), (下)", 吉岡書店, 1996, 1998.
- [90] 関口忠, "プラズマ工学", 電気学会, 1997.
- [91] 大野克嗣, "非線形性とくりこみ", 日本物理学会誌 Vol.52, No.7, 501-507, 1997.
- [92] 河野, "プラズマにおける不安定性の非線形発展", 核融合研究 第75巻第2号, 解説, 87-95, 1999.
- [93] 森本, 森, "ビーム・プラズマ系に励起される Trivelpice-Gould モードの成長率", 信学論 J83-C, Vol.J83-C, No.1, pp.23-29, Jan.2000.

## 謝辞

本研究を進めるにあたり多大なるご指導と励ましをいただいた元徳島大学工学部電気電子工学科森一郎教授に厚くお礼申し上げます。電子ビーム・プラズマ放電に関する研究は徳島大学工学部電子工学科在学中からのもので、詫間電波工業高等専門学校に勤務したことにより一時離れてはありましたが、十年ほど前に再開いたしました。この間、平成五年に内地研究員として受け入れて下さったことが、本研究の方向を定めたように思います。この機会提供の他、実験装置をはじめとするあらゆる設備を快く利用させていただきました徳島大学工学部の他の諸先生方にも大変お世話になりました。また、特に付け加えなければなりませんが、近藤俊昭技官には、研究を行う上で、何かと便宜を図っていただきました。本当に有り難うございました。さらに、詫間電波工業高等専門学校とりわけ情報通信工学科の方々には計測装置の校外使用の他、公務の肩代わりなどいろいろと援助して下さいました。ここに、心より深く感謝いたします。







論文審査の結果の要旨

報告番号	甲 工 乙 工 第 58 号 工 修	氏 名	森 本 敏 文
審査委員	主 査 大 宅 薫 副 査 新 谷 義 廣 副 査 福 井 萬壽夫		
学位論文題目 電子ビーム・プラズマ系に発生する波動現象と不安定性			
審査結果の要旨 <p>プラズマ中に電子ビームを注入して励起される波動について、これまで実験及び理論の両面からその特徴及び性質が研究されてきた。その初期には線形分散関係式を基礎とした議論がなされたが、電子ビーム・プラズマ放電のような強い相互作用の理解には非線形的な取り扱いが必要となり、弱い非線形性からソリトンのような強い非線形理論へと発展してきた。本論文は、初期の境界を無視した実数計算のみの線形分散関係式に対する筆者の疑問から出発し、境界条件を含む Trivelpiece-Gould (T-G) モードの線形分散関係式の複素計算を行い、実験との比較を通して、電子ビーム・プラズマ放電に至る機構を検討している。</p> <p>第2章では、T-G モードの分散関係式の複素計算を述べている。総当たり法でさまざまなパラメータのもとで数多くの計算を行い、その結果から、実験と比較する上で不可欠となる波動成長率を求め、その性質を明らかにしている。また、その成長率の衝突項による影響についても言及している。第3章では、電子ビーム・プラズマ系の実験装置及び実験結果を述べている。特に、分散関係式の計算結果との対応のため、励起される波動の周波数、位相、偏波を中心にそれらの特性を詳しく調べている。第4章では、分散関係式の計算結果と実験との比較検討を行っている。電子ビーム・プラズマ系には、その相互作用の大きさにより第一、第二、第三段階の3状態があるが、それぞれの段階において、どの T-G モードが励起され、バースト波となるのか、また、電子ビーム・プラズマ放電がいかんして開始されるかを議論している。第5章では、実験で観測されるバースト波がソリトンではないかという考えを非線形理論式を用いて議論している。また、電子ビーム・プラズマ系のイオン波の性質を知るために、結晶格子モデルを用いてその非線形性を調べている。</p> <p>以上本研究は、電子ビーム・プラズマ系に発生する波動の性質とその不安定性を T-G モードの複素解析と実験を通じて詳しく調べ、電子ビーム・プラズマ放電の開始機構について考察したものであり、本論文は博士（工学）の学位授与に値するものと判定する。</p> <p>なお、本論文の審査には、徳島文理大学工学部 森 一郎教授の協力を得た。</p>			